К. ЦВИККЕР и К. КОСТЕН

ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИЕ МАТЕРИАЛЫ

scan © AHL 2020

К. ЦВИККЕР и К. КОСТЕН

ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИЕ МАТЕРИАЛЫ

Перевод с английского

И. Д. ИВАНОВА

Под редакцией

Л. М. БРЕХОВСКИХ

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва • 1952

D-1518

9. KACr

5C
4282

Sound Absorbing Materials

by

C. ZWIKKER and C. W. KOSTEN

NEW YORK — LONDON

1 9 4 9

103534
up19

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Важное практическое значение для решения ряда проблем архитектурной акустики имеет вопрос о звукопоглощающих материалах, которому и посвящена предлагаемая советскому читателю в переводе книга Цвиккера и Костена. Достоинство этой книги заключается в том, что она, имея сравнительно малый объем, освещает вопрос о звукопоглощающих материалах довольно полно как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Так, весьма полно и хорошо излагаются вопросы распространения звука в пористых средах. При этом учитываются эффекты вязкости и теплопроводности, обусловливающие поглощение звука, а также влияние податливости «скелета» на акустические константы материала. Кроме того, рассматривается поглощение звука одним или несколькими слоями пористого материала при различных условиях (свободные слои и слои, укрепленные на твердой стенке, слои с закрытыми и открытыми порами и т. д.). В специальной главе, посвященной резонансным звукопоглотителям, даются основные представления и рассматриваются примеры резонансных поглотителей.

Большое внимание в книге уделено экспериментальным методам исследования звукопоглощающих материалов, причем дается описание различных схем и применяемой аппаратуры. Весь излагаемый материал хорошо иллюстрирован графиками, рисунками и фотографиями.

Однако книга не является монографией, исчерпывающим образом освещающей вопрос о звукопоглощающих материалах. Например, при изложении теории резонансных и слоистых поглотителей авторами не учтено весьма широкое и глубокое развитие ее в работах советских авторов еще в предвоенные годы (С. Н. Ржевкин, Г. Д. Малюженец и др.). Следует отметить, что и по другим затронутым в книге вопросам почти полностью отсутствуют ссылки на работы советских авторов. Это обстоятельство, разумеется, снизило научное качество книги. Несмотря на это, выход книги на русском языке представляется целесообразным, хотя бы в том отношении, что в ней дается систематический обзор работ, выполненных за границей. Поскольку советский читатель располагает

полными обзорными работами русских авторов [С. Н. Ржевкин, Обзор работ по резонансным звукопоглотителям, Усп. физ. наук, **30**, вып. 1—2 (1946); Н. Н. Андреев и др., Архитектурная акустика в СССР, там же, **37**, вып. 3 (1949)] вместе с исчерпывающей библиографией, то мы не сочли необходимым дополнять перевод ссылками на отечественные работы.

Необходимо также отметить наличие значительного числа мелких погрешностей, допущенных авторами при написании книги, заключающихся в большинстве случаев в неточностях формулировок и в неясности обоснований ряда умозаключений и теоретических результатов. Эти погрешности мы старались выправить при редактировании перевода. Наиболее существенные из них отмечены в подстрочных примечаниях.

Книга представляет интерес как для физиков, занимающихся акустикой, так и для инженеров.

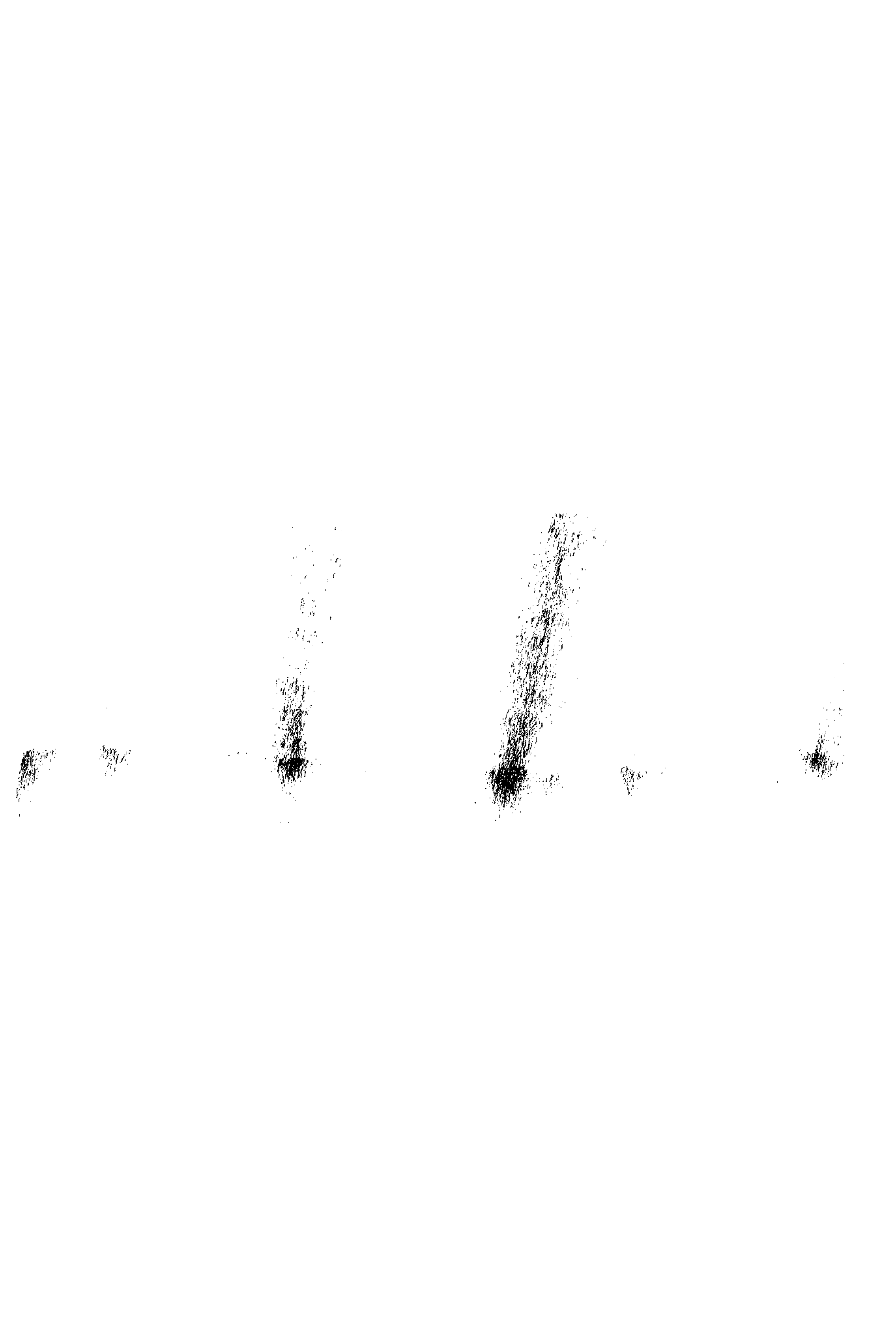
ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

В периодической литературе по акустике имеется большое количество данных, касающихся характеристик различных материалов, применяемых для звукопоглощения. Анализ этих данных и, в частности, необходимой толщины слоев, пористости, диаметра пор, упругости и т. д. позволяет разумным образом подойти к разработке новых материалов. В предлагаемой книге сделана попытка подвести под этот вопрос научную базу. В связи с этим излагаются также и основы теории распространения звуковых волн в сплошных и пористых средах.

За исключением гл. VIII всюду рассматривается нормальное падение звуковой волны на звукопоглощающий материал. Специально рассматривается случай поглощающего материала, помещенного позади перфорированного экрана (гл. VII).

В первоначальном варианте книга была написана первым из авторов зимой 1944/45 г., когда какая-бы то ни была лабораторная работа была невозможна. Вследствие трудностей военного времени печатание книги так сильно задержалось, что возникла необходимость переработки книги и включения в нее вопросов, рассмотренных в вышедших за это время работах. Эту задачу взял на себя второй автор, причем текст книги был почти целиком переписан. Кроме того, включена была новая глава о резонаторах.

Насколько нам известно, в литературе нет аналогичной книги, излагающей результаты основных исследований акустических материалов; это оправдывает выход в свет настоящей монографии.



Глава I

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ ЗВУКА ОДНОРОДНЫМИ СЛОЯМИ

§ 1. ПОСТОЯННАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ВОЛНОВОЙ ИМПЕДАНС

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в направлении оси x в однородной, изотропной и безграничной среде. При наличии затухания звуковое давление в волне как функция времени t и координаты x запишется в следующем виде:

$$p(x) = Ae^{j\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\alpha x}, \tag{1.1}$$

где $j^2 = -1$, $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, c — скорость распространения звука. При $x = 0$ имеем

$$p(0) = Ae^{j\omega t}.$$

Полагая, кроме того, $\omega/c = \beta$ и $\alpha + j\beta = \gamma$, получим для затухающей волны более компактное выражение

$$p(x) = p(0)\, e^{-\gamma x}.$$

Величина γ, зависящая от ω, может быть названа *постоянной распространения*; ее действительная часть — *коэффициентом затухания*, а мнимая часть β — *волновым числом.*

Скорость колебания в звуковой волне v может быть записана в аналогичном виде:

$$v(x) = v(0)\, e^{-\gamma x},$$

откуда видно, что в бегущей волне отношение p/v не зависит от x. В дальнейшем через v мы будем обозначать объемную скорость, т. е. объем, проходящий в единицу времени через единицу поверхности. В однородной среде v совпадает с колебательной скоростью частиц среды. Однако в пористой среде с твердым скелетом v меньше скорости колебания воздуха, причем отношение этих двух скоростей равно отношению объема пор к общему объему, h. Это отношение называется *пористостью* среды и является одним из основных акустических параметров материала.

По аналогии с терминологией, принятой в электротехнике, отношение

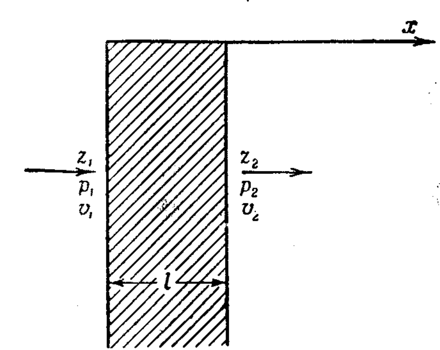
$$z(x) = \frac{p(x)}{v(x)} \tag{1.2}$$

называют удельным акустическим импедансом в точке x. Для бесконечной среды z не зависит от x, т. е. является материальной константой. Последняя называется *волновым импедансом* и обозначается через W. Так как в общем случае p и v находятся не в фазе друг с другом, то W является комплексной величиной. Если в плоскости $x=0$ в безграничной среде приложено периодическое давление $p(0)$, то зависимость p и v от x и t вполне определяется двумя постоянными W и γ.

Таким образом, эти постоянные полностью определяют акустическое поведение среды.

§ 2. ИМПЕДАНС СЛОЯ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассмотрим однородный слой толщины l (простирающийся от $x=0$ до $x=l$), характеризуемый постоянными γ и W. Предполагая, что импеданс z_2 на задней стороне ($x=l$) задан, определим импеданс z_1 при $x=0$ (фиг. 1).



Фиг. 1. Слой, нагруженный импедансом z_2.

Вследствие отражения звуковых волн от границ слоя, p будет представлять собой суперпозицию волн, бегущих в прямом и обратном направлениях:

$$p(x) = p_i e^{\gamma(l-x)} + p_r{}^{-\gamma(l-x)},$$

и аналогично

$$v(x) = \left(\frac{p_i}{W}\right) e^{\gamma(l-x)} - \left(\frac{p_r}{W}\right) e^{-\gamma(l-x)},$$

где p_i и p_r — давления в прямой и обратной волнах в слое при $x=l$.

В качестве граничного условия имеем $p(l)/v(l)=z_2$; после чего легко получаем

$$\frac{p_r}{p_i} = \frac{z_2 - W}{z_2 + W}. \tag{1.3}$$

Подставляя это выражение в предыдущие уравнения, находим импеданс при $x=0$:

$$z_1 = W \frac{z_2 \operatorname{ch} \gamma l + W \operatorname{sh} \gamma l}{z_2 \operatorname{sh} \gamma l + W \operatorname{ch} \gamma l}. \tag{1.4}$$

Эта формула хорошо известна в теории электрических линий.

В частности, при $z_2 = W$ из этой формулы получается случай бесконечной среды, причем $z_1 = W$. Другой практически важный случай $z_2 = \infty$ реализуется при расположении поглощающего материала на абсолютно твердой стенке. При этом

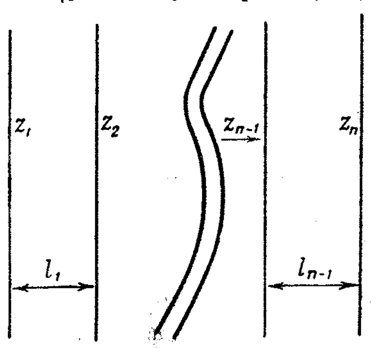
$$z_1 = W \operatorname{cth} \gamma l. \tag{1.5}$$

Наконец, при $z_2 = 0$ из (1.4) получаем

$$z_1 = W \operatorname{th} \gamma l. \tag{1.6}$$

Так как импеданс слоя воздуха толщиной в $^1/_4$ длины волны, ограниченного сзади твердой стенкой, равен нулю [см. (1.5), где при отсутствии затухания $\gamma = j\omega/c$], то последний случай можно осуществить, поместив поглощающий слой на расстоянии $^1/_4\ \lambda$ от твердой стенки.

Посредством последовательного применения формулы (1.4) принципиально можно найти акустический импеданс для комбинации любого числа n слоев (фиг. 2). При этом по z_n вычисляется z_{n-1}, затем по z_{n-1} вычисляется z_{n-2} и т. д., до тех пор, пока не будет, наконец, найдено значение z_1. Однако вследствие сложности вычислений лучше пользоваться рассмотренным ниже геометрическим методом (см. фиг. 67).



Фиг. 2. К вычислению импеданса многослойной системы.

§ 3. ВОЛНОВОЙ ИМПЕДАНС ВОЗДУХА

Теоретический вывод постоянных W и γ для любой среды производится всегда одним и тем же образом. При этом исходят из уравнения движения частиц среды и из уравнения непрерывности. Мы рассмотрим простейший случай — распространение звука в воздухе без учета затухания.

Уравнение движения Ньютона (сила равна произведению массы на ускорение) в применении к тонкому слою воздуха толщиной dx дает

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}, \tag{1.7}$$

где ρ_0 — плотность. Уравнение непрерывности будет

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{K_0}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{1.8}$$

где $K_0 = \dfrac{dp}{d\rho/\rho_0}$.

Дифференцируя (1.7) по x и (1.8) по t и исключая $\partial^2 v/\partial x\,\partial t$, получим дифференциальное уравнение для p:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{\rho_0}{K_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{1.9}$$

Так как мы ищем решение в виде

$$p=Ae^{-\gamma_0 x+j\omega t},$$

то $-\frac{\partial}{\partial x}=\gamma_0$, $\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$, вследствие чего (1.9) принимает вид

$$\gamma_0^2=-\frac{\rho_0}{K_0}\omega^2,$$

откуда

$$\gamma_0=\pm j\omega\sqrt{\frac{\rho_0}{K_0}}. \tag{1.10}$$

Сравнивая выражения (1.1) и (1.10), видим, что постоянная $\sqrt{K_0/\rho_0}$ является скоростью распространения c_0 звуковых волн в воздухе; знак плюс относится к волнам, бегущим в положительном направлении оси x, знак минус — к волнам, бегущим в обратном направлении. Подстановка этой величины вместо $-\frac{\partial}{\partial x}$ и $j\omega$ вместо $\frac{\partial}{\partial t}$ в уравнения (1.7) или (1.8) сразу дает значение волнового импеданса

$$\frac{p}{v}=W_0=\sqrt{K_0\rho_0}=\rho_0 c_0. \tag{1.11}$$

Из (1.11) видим, что этот импеданс является вещественной величиной. Подставляя в (1.11) значения ρ_0 и c_0 для воздуха при комнатной температуре, получаем $W_0\approx 420$ *кгм*$^{-2}$ *сек*$^{-1}$ (или 42 в системе CGS).

При падении плоской волны из воздуха на стенку, имеющую импеданс z, будет происходить отражение. Отношение звукового давления в отраженной волне к давлению в падающей волне в точке, расположенной непосредственно у стенки, дается выражением, аналогичным (1.3),

$$r=\frac{p_r}{p_i}=\frac{z-W_0}{z+W_0}. \tag{1.12}$$

Будем называть это отношение *коэффициентом отражения*. В общем случае это комплексная величина. Квадрат ее модуля дает коэффициент отражения по энергии. Для коэффициента поглощения имеем

$$a_0=1-\left|\frac{p_r}{p_i}\right|^2=1-\left|\frac{z-W_0}{z+W_0}\right|^2. \tag{1.13}$$

Индекс 0 у a добавлен для того, чтобы отметить случай нормального падения.

Полученные здесь для свободного воздуха формулы имеют более общую применимость. Уравнения движения и непрерывности во многих случаях могут быть записаны точно в такой же форме, как (1.7) и (1.8), хотя при этом постоянные ρ и K будут иметь другие, в общем случае комплексные значения.

Во избежание путаницы все величины, относящиеся к свободному воздуху, в дальнейшем будут снабжаться индексом нуль, как это, например, сделано в настоящем параграфе: ρ_0, K_0, γ_0, W_0, c_0.

Практически важным способом применения поглощающих материалов является непосредственное укрепление слоя материала на твердой стенке. Как было показано в § 2, импеданс на передней стенке слоя в этом случае будет

$$z = W \operatorname{cth} \gamma l.$$

Или, учитывая (1.10) и (1.11), получаем общее выражение для импеданса любого слоя, укрепленного на твердой стенке,

$$z = \sqrt{K\rho} \operatorname{cth} j\omega l \sqrt{\frac{\rho}{K}}\,. \qquad (1.14)$$

Исключением являются лишь некоторые податливые пористые материалы. Вопрос о вычислении K и ρ будет рассматриваться с § 7 гл. I по § 6 гл. II.

§ 4. ИЗОБРАЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Для понимания смысла таких формул, как (1.5) и (1.11), весьма полезно изображение $\operatorname{cth} \gamma l$ и других комплексных функций z от ω на комплексной плоскости. Если предположить, что ω пробегает все значения от 0 до ∞, то значения рассматриваемой функции в комплексной плоскости будут располагаться на некоторой кривой. Последняя более наглядна, чем аналитическая формула. Для построения кривой необходимо отделить действительную часть функции от мнимой, т. е. представить z в форме $z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$, после чего остается лишь изобразить z в плоскости с координатами x и y.

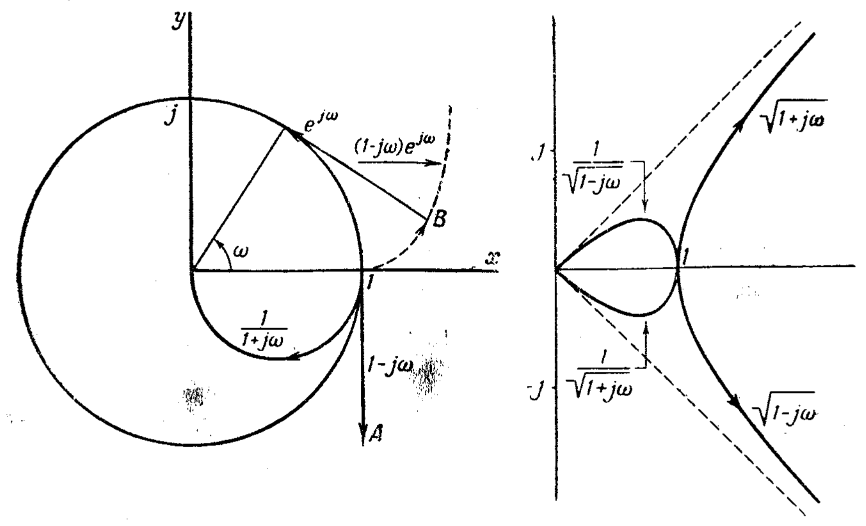
Примеры: функция $z = 1 - j\omega$ в комплексной плоскости представляет собой прямую, начинающуюся в точке $x = 1$, лежащей на действительной оси, и идущую параллельно оси y вниз (фиг. 3).

Функция $z = e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$ изображается окружностью единичного радиуса.

Умножение комплексного числа на $e^{j\omega}$ соответствует повороту его вокруг начала координат на угол ω. Так, при умножении числа, соответствующего точке A (см. фиг. 3), на $e^{j\omega}$ мы

получаем точку B; очевидно, что B лежит на развертке окружности. Следовательно, кривая $z=(1-j\omega)e^{j\omega}$ является разверткой окружности.

Функция $z=\sqrt{1+j\omega}$ изображается гиперболой с взаимно перпендикулярными асимптотами (фиг. 4). Действительно, положив $z=x+jy=\sqrt{1+j\omega}$, после возведения в квадрат получаем $x^2-y^2+2jxy=1+j\omega$. Приравнивание вещественных частей дает $x^2-y^2=1$, что соответствует указанной выше гиперболе.



Фиг. 3. Изображение развертки окружности в комплексной плоскости.

Фиг. 4. Изображение гиперболы и лемнискаты в комплексной плоскости.

Приравнивание мнимых частей дает $2xy=\omega$; так как ω всегда положительно, то x и y должны иметь одинаковые знаки. Отсюда следует, что функция $\sqrt{1+j\omega}$ изображается верхней ветвью гиперболы, нижняя же ветвь соответствует функции $\sqrt{1-j\omega}$. В более общем случае, когда $z=\sqrt{1 \pm jf(\omega)}$, где $f(\omega)$ произвольная вещественная функция ω, мы будем иметь ту же самую гиперболу, но с переменным масштабом для ω.

Обратным числом для $z=Me^{j\varphi}$ является $\frac{1}{z}=\frac{1}{M}e^{-j\varphi}$, т. е. модуль является обратной величиной модуля z, а фаза имеет противоположный знак. Так как лемниската является кривой, обратной гиперболе, то она соответствует, очевидно, функции $(1 \pm j\omega)^{-1/2}$. Окружность, как хорошо известно из геометрии, является кривой, обратной прямой линии. На фиг. 3 изображена

кривая, обратная половине прямой $1+j\omega$, в виде половины окружности, начинающейся в точке $x=1$ на действительной оси и кончающейся в начале координат.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ cth γl

На фиг. 5 изображена функция cth γl при переменном l. При построении использована следующая формула:

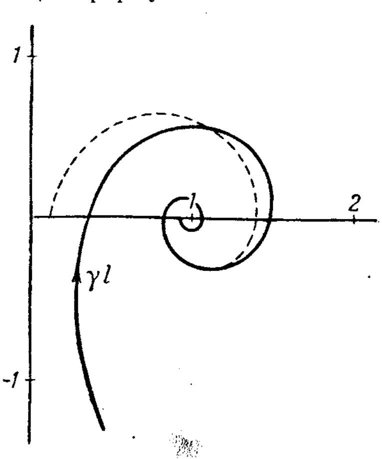
$$\operatorname{cth}\gamma l = \operatorname{cth}(\alpha + j\beta)\, l = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha l - j\sin 2\beta l}{\operatorname{ch} 2\alpha l - \cos 2\beta l} \qquad (1.15)$$

для постоянных значений α и β. Кривая выглядит как логарифмическая спираль. В самом деле, при больших значениях γl, cth γl аппроксимируется посредством логарифмической спирали, так как при этом

$$\operatorname{cth}\gamma l \sim 1 + 2e^{-2\gamma l}.$$

Если не принимать во внимание перемещения кривой на расстояние, равное 1, в направлении действительной оси, то второй член в последней формуле,

$$2e^{-2\gamma l} = 2e^{-2\alpha l}e^{-2j\beta l},$$



Фиг. 5. Изображение cthγl в комплексной плоскости.

будет представлять собой спираль с модулем $M = 2e^{-2\alpha l}$ и аргументом $\varphi = -2\beta l$. Исключая l, получим связь между M и φ:

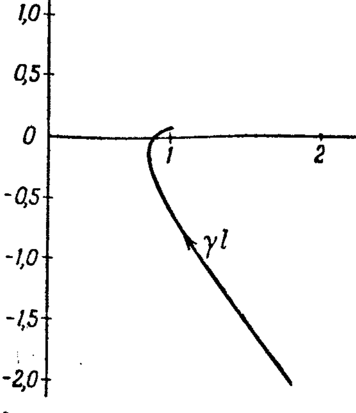
$$M = 2e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}.$$

Это выражение при постоянном α/β представляет собой уравнение логарифмической спирали в полярной системе координат. На фиг. 5 спираль обозначена пунктирной линией. Таким же образом можно показать, что th γl приближается к логарифмической спирали $1-2e^{-2\gamma l}$. Параметр α/β имеет простой геометрический смысл. Для логарифмической спирали угол, изображенный на фиг. 6, является постоянной величиной, равной arc tg β/α. Чем больше α, тем быстрее спираль сходится к ее полюсу. Фиг. 7 и 8 изображают два случая с параметром α/β, равным соответственно 1 и 0,1.

Для произвольной среды обе величины α и β являются функциями ω, а следовательно, и α/β зависит от ω. В этом случае мы получаем видоизмененную логарифмическую спираль с параметром α/β, меняющимся вдоль кривой. Фиг. 9 относится к

случаю, когда $\alpha/\beta = \mathrm{const}/\omega$. При больших значениях ω постоянная α/β приближается к нулю, при этом контур асимптотически приближается к окружности.

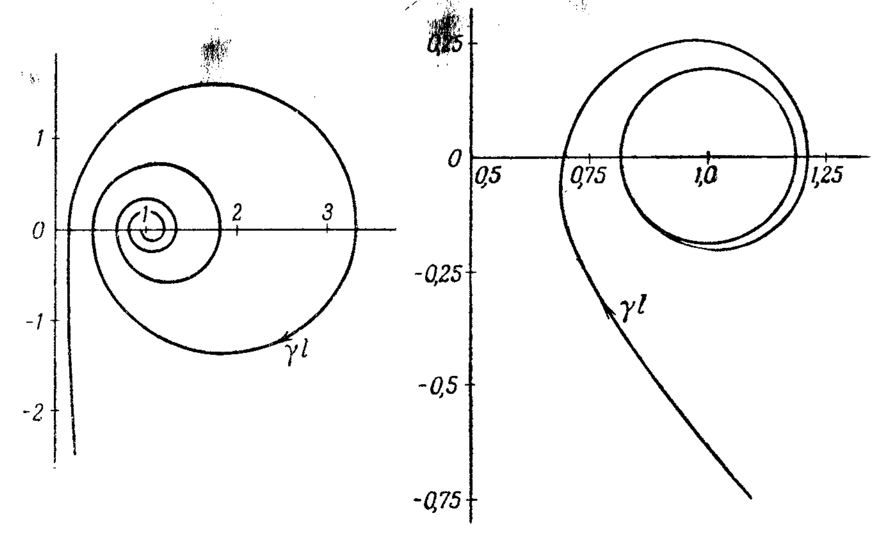
Умножение $\mathrm{cth}\,\gamma$ на комплексное число $W = Me^{j\varphi}$ [ср. (1.5)] приводит к расширению контура в M раз и повороту его на угол φ вокруг начала



Фиг. 6. Наклон $\mathrm{cth}\,\gamma l$.

Фиг. 7. cth с наклоном 1, сильное затухание.

координат, как в случае развертки окружности. Умножение на комплексное число W, которое само является функцией ω,



Фиг. 8. cth с наклоном 0,1, слабое затухание.

Фиг. 9. cth с наклоном, обратно пропорциональным частоте.

выполняется посредством применения этого процесса к каждой точке спирали, причем берутся точки W и $\mathrm{cth}\,\gamma l$ для одного и того же значения ω. Если при изменении частоты W не проходит через

всю диаграмму, то результат умножения может дать некоторое подобие спирали. Если же W пересекает всю плоскость, то результат будет иметь вид затухающей синусоиды, осью которой является контур W.

§ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФОРМУЛЫ (1.12)

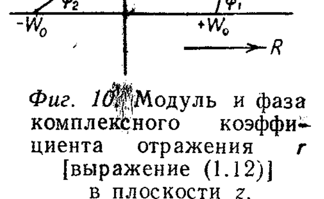
Дадим теперь геометрическую интерпретацию формулы (1.12)

$$r=\frac{z-W_0}{z+W_0}.$$

Переменная z является комплексной величиной, величины же W_0 и $-W_0$ вещественны. Поэтому на комплексной плоскости $z-W_0$ является вектором, идущим из точки W_0 в точку z, а $z+W_0$ — вектором, идущим из $-W_0$ в точку z. Комплексный коэффициент отражения равен отношению этих двух векторов. В общем случае отношение двух комплексных чисел

$$\frac{M_1 e^{j\varphi_1}}{M_2 e^{j\varphi_2}}=\frac{M_1}{M_2}\,e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

представляет собой вектор, абсолютная величина которого равна отношению модулей обоих чисел, а фаза равна разности фаз. Следовательно, абсолютная величина вектора p_r/p_i равна отношению абсолютных величин двух векторов, изображенных на фиг. 10, а аргумент его (фазовый угол, на который p_r опережает p_i) равен Δ[1]).



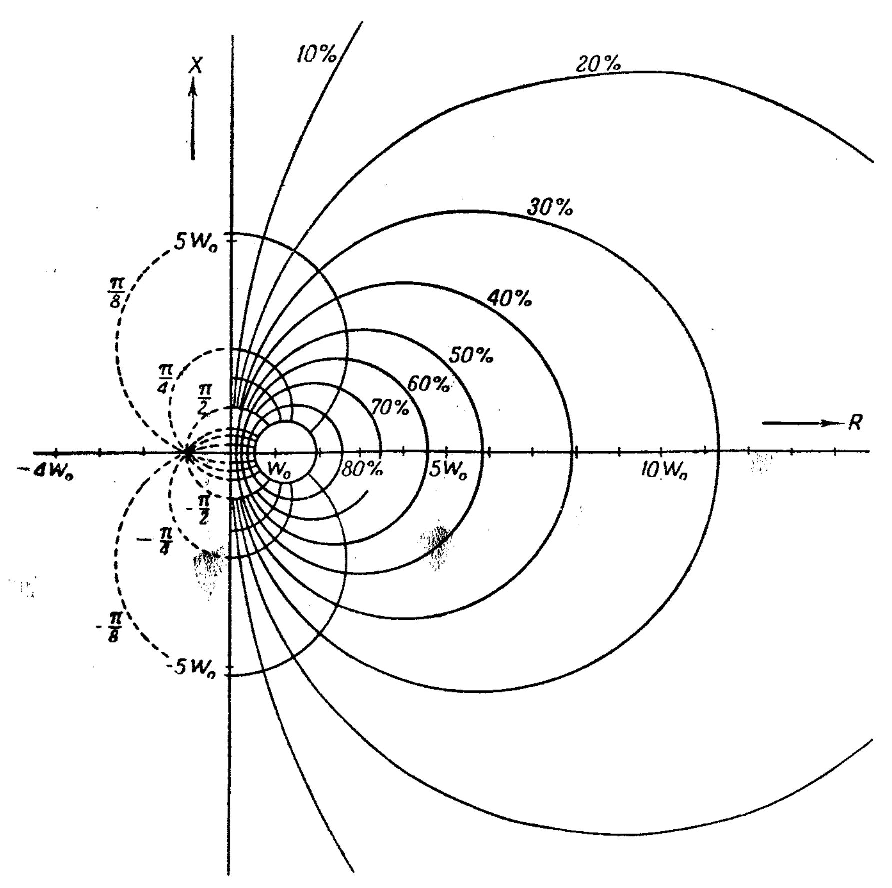
Фиг. 10. Модуль и фаза комплексного коэффициента отражения r [выражение (1.12)] в плоскости z.

Абсолютная величина r и, следовательно, величина коэффициента поглощения $a_0=1-|r|^2$ остаются постоянными вдоль контура, для которого $M_1/M_2=\text{const}$. Из геометрии известно, что таким контуром является окружность. При полном поглощении $M_1=0$ и окружность превращается в точку W_0 (фиг. 11). С другой стороны, известно, что геометрическим местом точек с одним и тем же значением величины Δ является окружность, проходящая в данном случае через точки W_0 и $-W_0$. Эти два семейства окружностей, соответствующих постоянным Δ и a_0, ортогональны, что можно доказать, основываясь на общем свойстве конформных преобразований (неизменность углов пересечения). Так как в плоскости r линии постоянных Δ (радиусы)

---

[1]) В соответствии с обозначениями, применяемыми в электротехнике, действительную часть z мы обозначаем через R, мнимую часть — через X, адмитанс $(1/z)$ — через Y.

ортогональны линиям постоянного $|r|$ (окружностям с центрами в начале координат), то и в плоскости z эти два семейства линий должны быть ортогональны. Это можно доказать также,



Фиг. 11. Комплексный коэффициент отражения r в плоскости импеданса. Окружности представляют собой линии равных значений фазы Δ и коэффициента поглощения a_0.

определяя $\left(\frac{\partial z}{\partial a_0}\right)_\Delta$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial \Delta}\right)_{a_0}$ из (1.12). Эти производные отличаются друг от друга мнимым множителем, что и указывает на ортогональность направлений $a_0 = \mathrm{const}$ и $\Delta = \mathrm{const}$.

Диаграмма на фиг. 11 весьма удобна. Действительно, если известно теоретическое выражение для z как функции частоты и построен соответствующий импедансный контур, то даже при беглом взгляде можно оценить зависимость коэффициента поглощения a_0 и фазы Δ от частоты. И наоборот, когда a_0 и Δ полу-

чены из измерений, то графическим методом без дополнительных вычислений можно найти соответственное значение величины z.

§ 7. ВОЛНОВОЙ ИМПЕДАНС СРЕДЫ С ВНУТРЕННИМ ТРЕНИЕМ

Распространим теперь результаты, полученные в § 3, на случай среды с трением. При этом колебания плотности будут отличаться по фазе от колебаний давления и, следовательно, величина $dp/d\rho$ будет комплексной. По определению, «объемный модуль упругости» K равен $\rho\,(dp/d\rho)$. Обозначим его вещественную часть через K_r. Тогда можно записать

$$K = K_r\,(1 + j\,\mathrm{tg}\,\delta), \tag{1.16}$$

где δ — угол потерь, равный разности фаз между dp и $d\rho$. Угол потерь всегда мал, причем измерения показывают, что он практически не зависит от ω, что существенно упрощает задачу. Однако K_r зависит от ω, по крайней мере при низких частотах.

Как показано в § 3, уравнение движения может быть записано в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\,\frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{или} \quad \gamma p = j\omega\rho v,$$

где рассматривается лишь волна, распространяющаяся в сторону положительных x. Уравнение непрерывности при этом записывается

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{K}\,\frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{или} \quad \gamma v = \frac{j\omega}{K}\,p,$$

откуда непосредственно получаем

$$\gamma = j\omega\sqrt{\frac{\rho}{K}}, \quad W = \sqrt{\rho K}. \tag{1.17}$$

Так как δ мало, то приближенно можно принять

$$\sqrt{K} = \sqrt{K_r}\left(1 + j\,\frac{\delta}{2}\right);\ \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{K_r}}\left(1 - j\,\frac{\delta}{2}\right).$$

В этом случае

$$\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + j\,\frac{\omega}{c} = j\omega\sqrt{\frac{\rho}{K_r}}\left(1 - j\,\frac{\delta}{2}\right),$$

откуда видно, что скорость распространения равна $c = \sqrt{K_r/\rho}$. Поэтому

$$\gamma = j\,\frac{\omega}{c}\left(1 - j\,\frac{\delta}{2}\right) \text{ и } W = \rho c\left(1 + j\,\frac{\delta}{2}\right). \tag{1.18}$$

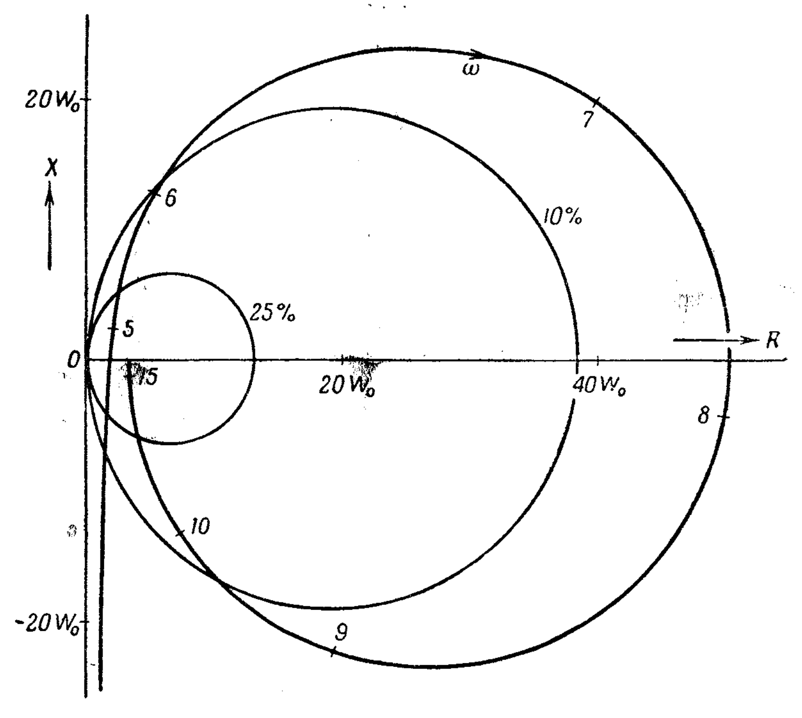
03534

Импеданс слоя толщины l, граничащего с абсолютно твердой стенкой, будет

$$z = W \operatorname{cth} \gamma l = \rho c \left(1 + j\frac{\delta}{2}\right) \operatorname{cth}\left[j\frac{\omega l}{c}\left(1 - j\frac{\delta}{2}\right)\right]. \quad (1.19)$$

Последнее выражение является частным видом общей формулы (1.14).

Мы видим, что акустические свойства материала определяются упругостью K_r, плотностью ρ и углом потерь δ.

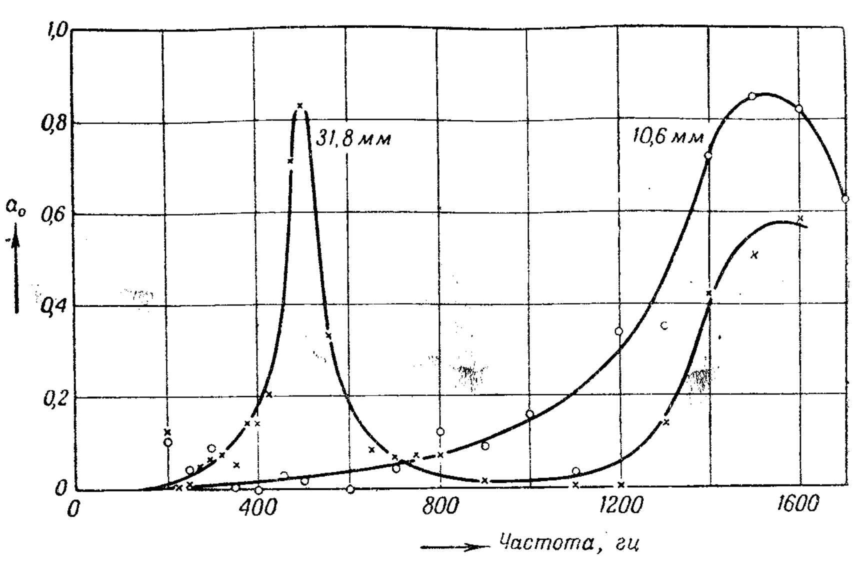


Фиг. 12. Импедансный контур образца пористой резины.
На контуре указаны частоты в сотнях герц. В точке, обозначенной цифрой 7, частота равна 700 *гц*, или $\omega = 2\pi \cdot 700$ радиан/сек.

Так как $\alpha/\beta = \delta/2$ не зависит от ω, то cth сводится к логарифмической спирали, и поскольку δ мало, то параметр спирали α/β тоже мал. При этом ее полюс лежит в точке $\rho c\left(1 + j\frac{\delta}{2}\right)$, т. е. несколько ниже действительной оси. Сравнивая этот случай со случаем незатухающего распространения, мы видим, что благодаря появлению δ здесь имеются две поправки. Поправка к W имеет малое значение, и в дальнейшем мы будем пренебрегать

отклонением W от ρc. Поправка же к γ более важная, так как ею обусловлено возникновение спирали. Таким образом, импеданс слоя конечной толщины достаточно хорошо передается кривой на фиг. 8.

На фиг. 12 дано графическое изображение импеданса для образца пористой резины с полностью закрытыми порами [1]. Не вдаваясь в описание методов измерений, рассмотрим кратко способы получения импедансных контуров, один из которых изображен на фиг. 12.



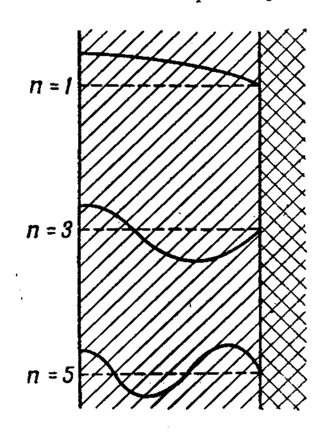
Фиг. 13. Коэффициент поглощения пористой резины. Случай резко селективного поглощения.

Экспериментальные данные, на основании которых строятся такие графики, получены в большинстве случаев с интерферометрами, имеющими малую точность; в особенности это относится к измерению фазового скачка Δ. На фиг. 12 через точки, представляющие результаты измерений, проведена сглаженная кривая. Точное положение экспериментальных точек можно найти в оригинальных работах. Числа около кривой импеданса означают частоту в сотнях герц.

После каждого оборота кривая для z проходит вблизи точки W_0, обусловливая высокий коэффициент поглощения на сравнительно малом интервале частот; эти абсорбционные пики отделяются друг от друга большими промежутками с малым поглощением (см. фиг. 13, где нанесены непосредственно экспериментальные точки).

Резонансные пики располагаются вблизи частот, при которых $\operatorname{cth}\gamma l$ вещественный. Из формулы (1.15) видно, что это имеет место, когда $\sin 2\beta l = 0$, т. е. $2\beta l = n\pi$, где n — целое число (для n нечетных — резонанс, для n четных — антирезонанс).

Учитывая, что $\beta = \omega/c$, для резонансных частот получаем $\omega = n\pi c/2l$. Первый резонансный пик ($n=1$) соответствует $\omega = \pi c/2l$, второй ($n=3$) соответствует $\omega = 3\pi c/2l$. Если перейти к длине волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, то резонансные пики будут соответствовать следующим длинам волн: $\lambda = 4l$, $4l/3$, $4l/5$ и т. д. Распределение амплитуды скорости по слою для трех первых резонансов дано на фиг. 14. Отношение между частотами первого и второго резонансов соответствует экспериментальному значению, полученному для слоя ячеистой резины (см. фиг. 13 для слоя толщиной 31,8 *мм*).



Фиг. 14. Распределение амплитуды скорости колебаний для первых трех резонансных частот.

Нужно заметить, что динамическое значение K_r оказывается в несколько раз больше статического. K_r можно вычислить из первой резонансной частоты по формуле

$$\omega = \frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{K_r}{\rho}}.$$

С помощью акустических измерений нетрудно определить угол потерь, применив формулу (1.15) к первому антирезонансу. При этом $\sin 2\beta l = 0$; $\cos 2\beta l = 1$ и $\operatorname{cth}\gamma l = \operatorname{cth}\alpha l \approx 1/\alpha l$. Из (1.18) имеем $\alpha = \omega\delta/2c$. Кроме того, для первого антирезонанса $l = \pi c/\omega$ и, следовательно, $\operatorname{cth}\gamma l = 2/\pi\delta$. Соответствующий импеданс согласно (1.19) будет

$$z_{\text{антирез.}} = \rho c\,\frac{2}{\pi\delta}. \qquad (1.20)$$

Таким образом, δ может быть подсчитана из опытного значения z для первого антирезонанса. Полученное этим путем значение δ хорошо согласуется со значением, найденным чисто механическим путем. В случае резонанса для z также можно вывести простую формулу. При этом $\sin 2\beta l = 0$; $\cos 2\beta l = -1$ и из (1.15)

$$\operatorname{cth}\gamma l = \operatorname{th}\alpha l \approx \alpha l;$$

подставляя сюда $l = \pi c/2\omega$, $\alpha = \omega\delta/2c$, получаем

$$z_{\text{рез.}} = \frac{\rho c\pi\delta}{4}. \qquad (1.21)$$

Эта формула также может служить для определения δ. Значение $z_{рез.}$ может быть найдено из (1.13), причем a_0 обычно известно с большой точностью.

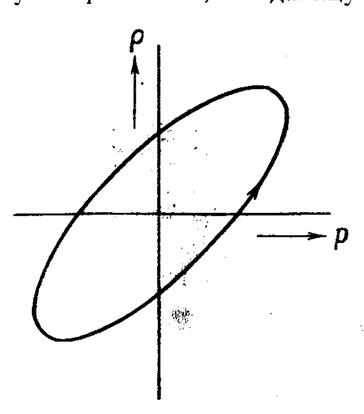
§ 8. УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ С ТВЕРДЫМ СКЕЛЕТОМ

Предположим пока, что пористый материал обладает твердым скелетом, и рассмотрим движение воздуха в материале.

Так как истинная скорость воздуха в порах изменяется от точки к точке, то мы будем оперировать с объемной скоростью v, определяемой как объем воздуха, проходящего через единицу поверхности, перпендикулярной данному направлению, в единицу времени. Обозначим пористость материала (отношение объема пор к общему объему) через h; тогда, очевидно, при заданном градиенте $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ будет в $1/h$ раз больше, чем в свободном воздухе. Уравнение непрерывности при этом запишется

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{h}{\rho_0}\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial t},$$

причем величина $\rho_0(dp/d\rho)$ может быть комплексной. Если на некоторое время пренебречь вязкостью, то будет иметься два предельных случая, когда ρ и p колеблются в фазе друг с другом. В первом случае передача тепла от воздуха скелету и обратно происходит настолько быстро, что воздух, находящийся внутри, сохраняет постоянную температуру (изотермический случай, в соответствии с теорией Ньютона). При этом зависимость между p и ρ в воздухе описывается законом Бойля — Мариотта. В другом предельном случае передача тепла происходит так медленно, что воздух колеблется адиабатически (предположение Лапласа). При этом зависимость между p и ρ дается законом Пуассона. В обоих случаях $dp/d\rho$ является вещественной величиной. Однако в общем случае обмен тепла происходит с конечной скоростью, причем во время фазы сжатия воздух теплее, чем скелет, во время фазы расширения — холоднее. Следовательно, при одной и той же величине p плотность меньше при сжатии, чем при расширении (фиг. 15); ρ и p находятся не в фазе друг с другом, поэтому $dp/d\rho$, а также модуль $\rho_0(dp/d\rho)$ являются комплексными величинами.



Фиг. 15. Потери при колебаниях, гистерезис.

С первого взгляда кажется странным, что эффект вязкости оказывает влияние на модуль упругости воздуха. Действительно, понятие модуля упругости относится к процессу сжатия и расширения воздуха, когда воздух в целом можно рассматривать неподвижным. Однако важную группу поглощающих материалов составляют акустические пористые штукатурки. Предположим, что в часть пор в материале воздух проникает лишь через сравнительно узкие каналы. Сдвиг фаз во времени между p и соответствующим изменением плотности ρ обусловлен сопротивлением этих каналов, так как через них воздух накачивается в поры с трудом. Этот эффект в некоторой степени может иметь место во всех практически применяемых материалах. В штукатурках такие поры могут иметь место внутри «макроскопических» глобул, из которых состоит этот материал. Конечно, сдвиг фаз будет частично обязан также и несовершенству теплового обмена. Выражение $(\rho_0/h)(dp/d\rho)$ будем обозначать через K. При этом уравнение непрерывности для бегущей волны снова принимает свою обычную форму

$$\gamma v=\frac{j\omega}{K}p, \text{ где } K=\frac{\rho_0}{h}\frac{dp}{d\rho}\approx\frac{K_0}{h}. \qquad (1.22)$$

Уравнение движения для воздуха, заключенного в материале, будет иметь вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{k}{h}\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}+\sigma v. \qquad (1.23)$$

По сравнению со случаем свободного воздуха сюда входят три новых параметра: *структурная постоянная* k, *пористость* h *и постоянная сопротивления* σ[1]. Последняя связана с учетом вязкости. Для стационарного потока член $\frac{\partial v}{\partial t}$ уничтожается, тогда σ определяется как отношение градиента давления к объемной скорости.

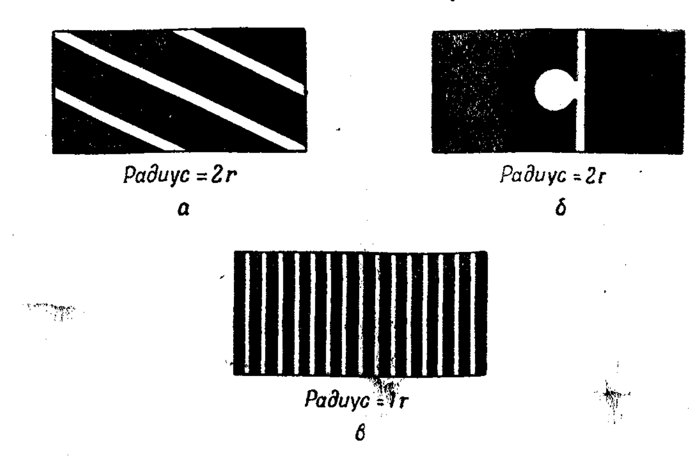
Существует несколько причин, обусловливающих повышение кажущейся плотности воздуха, что выражается неравенством $k/h>1$. Фактор k/h можно разбить на два: k и $1/h$, причем последний описывает обычное влияние пористости. Действительно, если при неизменной структуре пористость h уменьшается, то градиент давления, необходимый для получения той же объемной

[1]) В русской акустической терминологии пока не установилось определенного названия для величины σ. В случае стационарного потока аналогичная величина обычно называется «сопротивлением потоку» или «сопротивлением на продувание». В акустическом случае мы называем σ «постоянной сопротивления» или «воздушным сопротивлением». Последнее представляет буквальный перевод английского термина «air resistance», принятого в большинстве случаев у авторов. (*Прим. ред.*)

скорости, увеличивается. Появление фактора k обусловлено двумя эффектами, в которых первостепенную роль играют структурные свойства материала; этим обусловливается название *структурный фактор* для k.

Влияние структуры можно иллюстрировать следующими примерами.

Представим себе структуру с порами, расположенными наклонно по отношению к внешнему градиенту давления (фиг. 16,*а*). Вдоль этих пор градиент давления уменьшается вследствие появления множителя $\cos\theta$. Кроме того, ускорение воздуха в порах,



Фиг. 16. К понятию структурного фактора.

Три образца, обладающие одной и той же пористостью h и сопротивлением σ, но имеющие различные структурные факторы k.

обусловленное действием этого градиента, нужно спроектировать на направление внешнего градиента давления, вследствие чего появляется еще один раз множитель $\cos\theta$. Таким образом, для этой модели структурный фактор пропорционален $1/\cos^2\theta$. Если бы ориентация пор была хаотической, то средняя величина структурного фактора была бы равна 3.

Рассмотрим теперь среду, в которой поры соединяются с боковыми замкнутыми полостями (фиг. 16,*б*). Несмотря на наличие градиента давления, воздух в этих полостях остается в основном в покое, как если бы он был тяжелее воздуха в порах, что и обусловливает повышение величины фактора k. Другими словами, поскольку градиент давления приводит в движение лишь воздух в основных порах, а в боковых пустотах воздух остается неподвижным, в качестве пористости нужно принимать объем *основных* пор в единице объема материала,

т. е. h/k, где k приблизительно равно отношению объема всего воздуха к воздуху основных пор и всегда больше единицы.

Отличие k от единицы может обусловливаться также колебанием некоторых частей твердого скелета, которое ведет к увеличению кажущейся инертности воздуха. Хотя нельзя отрицать, что в принципе этот эффект имеет место даже в случае поглощающих материалов со сравнительно жестким скелетом, необходимо предостеречь читателя от преувеличения роли этого эффекта. В большинстве случаев (наиболее твердые поглощающие материалы) этот эффект очень мал и величина k определяется в основном структурой (в результате получаем, например, $k=3$). В случае заметной податливости скелета его движение может быть значительным, но при этом необходима разработка более точной математической теории, описывающей движение скелета, в которой учитываются также и внутренние силы, действующие между воздухом и скелетом (см. гл. III). Так как в этой главе мы ограничиваемся случаем твердого скелета, то влиянием его колебаний будем пренебрегать.

k содержит еще один фактор, зависящий от частоты ω, лежащий между 1 и $4/3$ и обусловленный внутренним трением воздуха[1]. Полное значение удобно разбить на два фактора k_ω и k_s ($k=k_\omega k_s$), где k_ω зависит от частоты, а k_s определяется исключительно внутренней структурой материала.

Вычислить k по описанию структуры образца, повидимому, невозможно. Поэтому приходится прибегать к помощи акустических измерений. Таким образом, невозможно предсказать количественно акустическое поведение пористого материала на основании таких простых величин, как пористость и постоянная сопротивления σ[2]. При этом опыт показывает, что величина k, как правило, лежит между 3 и 7, хотя в принципе она может принимать любое превышающее единицу значение.

Трактуя комплексное выражение $(k\rho_0/h)+(\sigma/j\omega)$ как эффективную плотность ρ, уравнение движения в случае бегущей волны запишем в виде

$$\gamma p = j\omega\rho v, \text{ где } \rho=\frac{k\rho_0}{h}+\frac{\sigma}{j\omega}, \tag{1.24}$$

откуда, как и раньше, найдем γ и W:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\frac{\rho}{K}}; \quad W=\sqrt{K\rho}.$$

---

[1] См. гл. II. (*Прим. ред.*)

[2] С этим принципиальным высказыванием авторов нельзя согласиться, по крайней мере в отношении материалов с простейшей структурой. (*Прим. ред.*)

Полагая далее $\rho = \frac{k}{h}\rho_0(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta_\rho)$, где $\mathrm{tg}\,\delta_\rho = \sigma h/\omega k \rho_0$, и $K = K_r(1 + j\,\mathrm{tg}\,\delta_K)$, найдем выражение для импеданса слоя толщины l:

$$z = \sqrt{\frac{k}{h}\rho_0 K_r}\sqrt{(1 - j\,\mathrm{tg}\,\delta_\rho)(1 + j\,\mathrm{tg}\,\delta_K)}\,\mathrm{cth}\left(j\omega l\sqrt{\frac{k\rho_0}{hK_r}}\sqrt{\frac{1-j\,\mathrm{tg}\,\delta_\rho}{1+j\,\mathrm{tg}\,\delta_K}}\right). \tag{1.25}$$

§ 9. ПОСТОЯННАЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ σ

Согласно закону Пуазейля, объемная скорость[1]) для трубки радиуса r в случае стационарного потока равна

$$v = -\frac{\pi r^4}{8\eta}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},$$

где η — вязкость воздуха. Если в единице поперечного сечения имеется n параллельных каналов, то суммарный поток будет в n раз больше, а так как в этом случае пористость $h = n\pi r^2$, то

$$v = -h\frac{r^2}{8\eta}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}.$$

В материалах с порами, наклонными по отношению к оси x, или с порами, сообщающимися с боковыми замкнутыми объемами (см. фиг. 16), v уменьшается в k раз, так что окончательно

$$v = -\frac{h}{k}\frac{r^2}{8\eta}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Здесь величина

$$\sigma = \frac{k}{h}\frac{8\eta}{r^2} \tag{1.26}$$

представляет собой постоянную сопротивления для стационарного потока с параболическим распределением скорости по сечению трубки.

Выражение (1.26) применимо также к материалам, не имеющим сквозных цилиндрических пор одного и того же сечения. В таких случаях под r нужно понимать некоторую среднюю величину, определяемую уравнением (1.26).

В случае колебаний высокой частоты характер потока существенно меняется. В этом случае влияние твердых стенок испытывают только наружные слои воздуха. Вблизи центров пор воздух колеблется приблизительно как единое целое, причем скорость определяется исключительно его массой. В предельном

---

[1]) Объем жидкости, протекающей в единицу времени. (*Прим. ред.*)

случае очень высоких частот лишь очень тонкие слои воздуха испытывают действие сцепления со стенками. В этом случае для σ Гельмгольцем [2] получено выражение

$$\sigma = \frac{k}{h} \frac{1}{r} \sqrt{2\eta\omega\rho_0}. \qquad (1.27)$$

Толщина слоя, на скорость в котором сказывается наличие стенки, имеет порядок $\sqrt{\eta/\omega\rho_0}$; для применимости формулы (1.27) она должна быть мала по сравнению с r. Таким образом, существенное значение имеет безразмерная величина $\mu = \sqrt{\omega\rho_0 r^2/\eta}$. При $\mu \gg 1$ справедлив закон Гельмгольца, а при $\mu \ll 1$ — закон Пуазейля. Нужно сопоставлять μ^2 с числом Рейнольдса в гидродинамике. Обе эти величины являются мерой относительной важности сил инерции по сравнению с силами вязкости. Форма их почти аналогична ($Re = \rho vd/\eta$).

Спрашивается, какая из двух формул, (1.26) или (1.27), будет применима в случае поглощающих пористых материалов? Не возникает ли необходимости иметь дело с промежуточными случаями, где математические формулы гораздо более сложны? Опыт показывает, что на практике могут иметь место все случаи.

Предельные случаи будут более подробно рассмотрены в гл. II, § 4. Приближенное выражение для промежуточных частот будет дано в гл. II, § 2.

Условия для двух рассмотренных здесь граничных случаев приблизительно совпадают с условиями, при которых модуль сжатия имеет простые выражения. Именно закон Пуазейля соответствует изотермическим колебаниям воздуха, в то время как закон Гельмгольца соответствует адиабатическому случаю. Это совпадение обязано наличию связи между вязкостью и теплопроводностью газа. Обе эти величины, согласно кинетической теории газов, пропорциональны друг другу и выражаются через среднюю величину свободного пробега молекул. Поэтому как только стенки перестают оказывать влияние на движение газового потока в середине трубы, прекращается и обмен тепла между стенками и средней частью потока.

Глава II

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

§ 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБАХ И ПОРАХ

В § 8 и 9 гл. I были затронуты некоторые вопросы, связанные с распространением звука в пористой среде с твердым скелетом. В этих вопросах существенным является значение частоты звука. При очень низких частотах сопротивление σ и упругость воздуха совпадают со своими статическими значениями. Вещественная часть плотности повышается на 33%, мнимая же ее часть при этом равна $\sigma/j\omega$, т. е. весьма велика. При очень высоких частотах плотность имеет нормальную величину, сопротивление принимает «гельмгольцево» значение (1.27), а модуль сжатия является адиабатическим.

Перейдем теперь к рассмотрению промежуточных частот. Ниже дается строгое решение задачи о распространении звука в цилиндре методом Кирхгофа (см. § 4), применимое, правда, не для всех, а лишь для низких и высоких частот.

По сравнению с рассмотренными выше экспериментальными случаями *очень* низких и *очень* высоких частот, величины K и ρ, а значит, и W и γ получают некоторые поправки. В теории Кирхгофа вязкость и теплопроводность учитываются одновременно. Однако в конечном результате оказывается, что поправочный фактор в K зависит только от теплопроводности, а в ρ — только от вязкости. На первый взгляд это кажется весьма естественным, хотя мы и не знаем, как это обстоятельство можно было бы получить из самих дифференциальных уравнений, на которых основывается теория Кирхгофа. Однако если мы, не обращая внимания на отсутствие обоснования, сразу предположим, что при вычислении K можно пренебречь вязкостью, а при вычислении ρ — теплопроводностью, то выкладки оказываются весьма простыми. Более того, при этом оказывается возможным вывод выражений для K и ρ при *всех промежуточных частотах*, а не только при низких и высоких частотах; из этих выражений легко находятся выражения W и γ при *любых частотах*.

Для удобства читателя этот вывод излагается первым. Вывод выражения для ρ (см. § 2) принадлежит Крэндаллу [2]. Вывод K дается на основе точной теории Кирхгофа (см. § 3).

Чтобы освободиться от предположения, что K и ρ могут вычисляться раздельно, мы излагаем также теорию, в которой

вязкость и теплопроводность учитываются одновременно (см. § 4). Однако при этом мы должны ограничиться сравнительно высокими и низкими частотами. Этот вывод дается для законченности картины, и читатель, не интересующийся всеми деталями, может при чтении его опустить.

§ 2. РАСЧЕТ ПЛОТНОСТИ ПРИ ПРЕНЕБРЕЖЕНИИ ТЕПЛОВЫМИ ЭФФЕКТАМИ

Вывод выражения для плотности аналогичен выводу закона Пуазейля, с добавкой лишь инерциального члена. Сила, действующая на кольцевой элемент объема $2\pi r dr dx$, равна $-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) dx\, 2\pi r\, dr$. Скорость является функцией радиуса r, вследствие чего на кольцо действует также сила вязкости

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-2\pi r \eta\, dx \frac{\partial v}{\partial r}\right) dr.$$

Наконец, нужно принять во внимание силу инерции

$$j\omega\rho_0 2\pi r\, dr\, dx\, v.$$

Приравнивая движущую силу к силам вязкости и инерции, получаем

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \left[j\omega\rho_0 - \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right] v,$$

что может быть записано в виде

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k^2\right) v, \quad \left(k^2 = -\frac{j\omega\rho_0}{\eta}\right). \tag{2.1}$$

Решением последнего уравнения будет

$$v = \frac{1}{\eta k^2}\frac{\partial p}{\partial x} + A J_0(kr), \tag{2.2}$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. A можно определить, исходя из условия исчезновения v на стенках цилиндра ($r = R$). Подставляя найденную таким образом величину A в (2.2), получим

$$v = -\frac{1}{j\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}\left[1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}\right]. \tag{2.3}$$

Средняя по сечению скорость $\bar{v}$ находится путем замены функции $J_0(kr)$ на ее среднюю по сечению величину

$$\overline{J_0(kr)} = \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^R J_0(kr)\, 2\pi r\, dr.$$

Этот интеграл можно оценить с помощью хорошо известной формулы [3]

$$\int_0^a xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)\Big|_0^a = aJ_1(a),$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка.

В результате

$$\overline{J_0(kr)} = \frac{2}{kR} J_1(kR). \qquad (2.4)$$

Подставляя это выражение в (2.3), получаем

$$\bar{v} = -\frac{1}{j\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}\left[1 - \frac{2}{kR}\frac{J_1(kR)}{J_0(kR)}\right]. \qquad (2.5)$$

Сравнивая уравнение $-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$, являющееся определением средней комплексной плотности, с уравнением (2.5), получаем выражение для ρ. Введя обозначение $kR = \mu\sqrt{-j}$ [см. (2.1)], можно записать ρ в виде

$$\rho = \rho_0 \Big/ \left[1 - \frac{2}{\mu\sqrt{-j}}\frac{J_1(\mu\sqrt{-j})}{J_0(\mu\sqrt{-j})}\right]. \qquad (2.6)$$

Рассмотрим крайние случаи. При $\mu < 1$ (низкие частоты или узкие поры) в выражениях для J_0 и J_1 можно ограничиться тремя членами:

$$J_0(\mu\sqrt{-j}) = 1 + \frac{1}{4}j\mu^2 - \frac{1}{64}\mu^4,$$

$$J_1(\mu\sqrt{-j}) = \frac{1}{2}\mu\sqrt{-j}\left(1 + \frac{1}{8}j\mu^2 - \frac{1}{192}\mu^4\right),$$

а выражение для ρ можно записать в одном из следующих видов:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho = \frac{4}{3}\rho_0\left(1 - 6\frac{j}{\mu^2}\right),\\
\text{или}\quad &\rho = \frac{4}{3}\rho_0\left(1 - 6\frac{j\eta}{\omega\rho_0 R^2}\right),\\
\text{или}\quad &\rho = \frac{4}{3}\rho_0 + \frac{1}{j\omega}\frac{8\eta}{R^2},\\
\text{или}\quad &\rho = \frac{4}{3}\rho_0 + \frac{1}{j\omega}\sigma_{\text{стат}}.
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\mu < 1\\ \text{низкие частоты.}\end{array} \qquad (2.7)$$

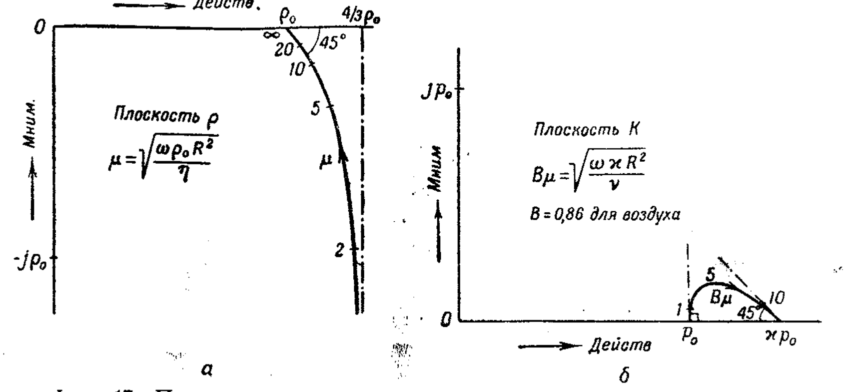
С другой стороны, при $\mu > 10$ (т. е. при высоких частотах или широких порах) мы можем положить $J_1/J_0 = j$, причем мнимая

часть, $\sqrt{-j}$ предполагается положительной. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_0\left(1 - 2\frac{\sqrt{-j}}{\mu}\right), \\ \text{или}\quad \rho &= \rho_0\left[1 + (1-j)\sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho_0 R^2}}\right] \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\mu > 10 \\ &\text{высокие частоты,} \end{aligned} \qquad (2.8)$$

что согласуется с уравнением (1.27).

На фиг. 17, *а* изображен контур ρ в функции от μ. При малых частотах (μ мало) вещественная часть ρ равна $4\rho_0/3$, т. е.



Фиг. 17. Плотность и упругость воздуха для случая цилиндра.

плотность возрастает на 33% вследствие параболического распределения скорости по поперечному сечению. Мнимая часть эквивалентна статической величине $\sigma_{\text{стат.}}/j\omega$. При высоких частотах ($\mu$ велико) плотность отклоняется от нормальной плотности ρ_0 на *комплексную* величину, имеющую фазу, равную $-45°$ [см. (2.8)].

§ 3. УПРУГОСТЬ ВОЗДУХА В ЦИЛИНДРЕ (ПРИ ПРЕНЕБРЕЖЕНИИ ВЯЗКОСТЬЮ)

Распространение звуковой волны в цилиндре будем описывать, задавая в каждой точке величину звукового давления, три компоненты вектора скорости и отклонение температуры от средней. Все эти величины являются функциями координат и времени. Зависимость от времени может быть задана экспонентой $e^{j\omega t}$, так что $\frac{\partial}{\partial t}$ заменяется просто на $j\omega$.

Влияние теплопроводности на распространение звука объясняется следующим образом. При сжатии воздуха в цилиндре происходит местное повышение температуры. Так как температуру

стенки можно считать постоянной, то благодаря теплопроводности воздуха возникает поток тепла по направлению к стенке. Потоком тепла в аксиальном направлении в бегущей волне можно пренебречь.

При расчете модуля K нужно учесть, что повышение температуры будет зависеть от радиуса r и должно равняться нулю на границе $r=R$. То же самое нужно сказать и относительно радиальной компоненты скорости воздуха. Изменение плотности будет также зависеть от радиуса, но оно не обращается в нуль на границе. Что касается давления, то его можно считать постоянным во всем рассматриваемом объеме, так как радиус цилиндра предполагается очень малым по сравнению с длиной волны.

Изменением p в аксиальном направлении можно пренебречь. В частности, в пучности стоячей волны $\partial p/\partial x$ будет точно равно нулю.

Обозначим:

p_0 и p — равновесное давление и отклонение от него;
ρ_0 и $\delta\rho$ — равновесная плотность и отклонение от нее;
T_0 и δT — равновесная абсолютная температура и отклонение от нее;
$\mathbf{v}$ — скорость частиц;
s — сжатие $=\delta\rho/\rho_0$;
$\varkappa=C_p/C_v$ — отношение удельных теплоемкостей;
θ' — величина, пропорциональная относительному изменению температуры $=\delta T/(\varkappa-1)\,T_0$;
λ_h — теплопроводность;
$\nu=\lambda_h/\rho_0 C_p$ — «приведенная» теплопроводность[1];
Δ — оператор Лапласа $=\nabla^2=\operatorname{div}\operatorname{grad}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Мы будем иметь четыре следующих уравнения: уравнение непрерывности (2.9), уравнение для давления (2.10), уравнение движения (2.11) и уравнение теплопроводности (2.12):

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=-\frac{\partial s}{\partial t}, \tag{2.9}$$

$$p=p_0[s+(\varkappa-1)\,\theta'], \tag{2.10}$$

$$-\operatorname{grad}p=\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial t}+\nu\Delta\theta'. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.9) не нуждается в пояснениях. Оно является обычным уравнением непрерывности при учете, что $s=\delta\rho/\rho_0$. Уравнение (2.10) является законом Бойля — Гей-Люссака для

[1]) Или температуропроводность. (*Прим. ред.*)

случая малых изменений p_0, ρ_0 и T_0. Уравнение (2.11) также не нуждается в пояснении. Уравнение (2.12) связывает изменение температуры со сжатием и теплопроводностью. В нем член, соответствующий сжатию, снова вытекает из закона Бойля — Гей-Люссака, так как для адиабатических процессов

$$T=\rho^{\varkappa-1}\cdot\text{const}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta T}{T_0}=(\varkappa-1)\,\frac{\delta\rho}{\rho_0}.$$

Член, учитывающий теплопроводность, имеет тот же вид, что и в известном уравнении Фурье.

Положив $j\omega$ вместо $\frac{\partial}{\partial t}$ и исключив s из (2.10) и (2.12), получаем

$$\left(\Delta-\frac{j\omega\varkappa}{\nu}\right)\theta'+\frac{p}{p_0}\,\frac{j\omega}{\nu}=0.$$

Так как p не зависит от пространственных координат, то решение может быть записано в виде

$$\theta'=\frac{1}{\varkappa}\,\frac{p}{p_0}+AJ_0\left(r\sqrt{-\frac{j\omega\varkappa}{\nu}}\right),$$

причем второй член является решением однородного уравнения, а первый член — частным решением полного уравнения.

A находится из граничного условия $\theta'=0$ при $r=R$, и в результате

$$\theta'=\frac{1}{\varkappa}\,\frac{p}{p_0}\left[1-\frac{J_0\left(r\sqrt{-j\omega\varkappa/\nu}\right)}{J_0\left(R\sqrt{-j\omega\varkappa/\nu}\right)}\right].$$

Подстановка этого выражения для θ' в (2.10) дает

$$s=\frac{p}{\varkappa p_0}\left[1+(\varkappa-1)\,\frac{J_0\left(r\sqrt{-j\omega\varkappa/\nu}\right)}{J_0\left(R\sqrt{-j\omega\varkappa/\nu}\right)}\right].$$

По определению модуль сжатия K равен

$$K=\rho\,\frac{dp}{d\rho}=\frac{p}{s}.$$

Однако отношение p/s зависит от r. Поэтому необходимо определить среднее значение K по поперечному сечению цилиндра.

Если снова средние по поперечному сечению величины отмечать чертой сверху, то

$$\bar{p}=K\bar{s}.$$

Нам остается вычислить только $\bar{s}$, так как p постоянно. Усреднение s сводится к усреднению функции Бесселя по r, что делается так же, как и в уравнении (2.4) (увеличение порядка

функции Бесселя на единицу, деление ее на половину аргумента и замена r на R).

Заменив далее величину $R\sqrt{-j\omega\varkappa/\nu}$ на $B\mu\sqrt{-j}$, где $B=\sqrt{\eta\varkappa/\rho_0\nu}=0{,}86$ (для воздуха), получаем

$$K=\varkappa p_0\Big/\left[1+\frac{2}{B\mu\sqrt{-j}}(\varkappa-1)\frac{J_1(B\mu\sqrt{-j})}{J_0(B\mu\sqrt{-j})}\right]. \qquad (2.13)$$

Это выражение аналогично выражению (2.6) для ρ. При этом поскольку аргументы функций Бесселя в (2.13) и (2.6) почти одинаковы ($B\approx 1$), то смысл выражений «высокая», «низкая» и «промежуточная» частоты для плотности ρ и модуля сжатия K одинаков.

Приближенное выражение для K при низких (высоких) частотах легко находится из (2.13). При низких частотах аргумент функций Бесселя мал и мы получаем

$$\frac{2}{B\mu\sqrt{-j}}\frac{J_1(B\mu\sqrt{-j})}{J_0(B\mu\sqrt{-j})}=1+\frac{1}{8}(B\mu\sqrt{-j})^2.$$

Следовательно,

$$K=p_0\left[1+\frac{1}{8}j\frac{\varkappa-1}{\varkappa}(B\mu)^2\right] \qquad (\mu<1). \qquad (2.14)$$

Мы видим, что в рассматриваемом приближении модуль K остается неизменным (см. фиг. 17, *б*).

При высоких частотах аргумент функций Бесселя велик, так что можно положить

$$\frac{2}{B\mu\sqrt{-j}}\frac{J_1(B\mu\sqrt{-j})}{J_0(B\mu\sqrt{-j})}=\frac{2}{B\mu\sqrt{-j}}j.$$

При этом предполагается, что $\sqrt{-j}$ имеет положительную мнимую часть. В результате

$$K=\varkappa p_0\left[1+2\sqrt{-j}\frac{(\varkappa-1)}{B\mu}\right] \qquad (\mu>10). \qquad (2.15)$$

Здесь изменяются как модуль, так и фаза K. Контур для K приближается к предельному адиабатическому значению $\varkappa p_0$ в направлении, образующем угол в 45° с действительной осью (см. фиг. 17, *б*). Сравнивая выражения для ρ и K, получаем весьма простую связь между углами потерь (фазами) этих величин. Например, для воздуха

$$\operatorname{tg}\delta_\rho\cdot\operatorname{tg}\delta_K=0{,}16 \qquad \text{для } \mu<1,$$
$$\operatorname{tg}\delta_K=0{,}46\operatorname{tg}\delta_\rho \qquad \text{для } \mu>10.$$

Не приводя вывода, дадим выражение для K в случае, когда не делается предположения о независимости p от r:

$$K=p_0\left[1+(\varkappa-1)\frac{\frac{2}{R\sqrt{-\lambda_1}}\frac{J_1(R\sqrt{-\lambda_1})}{J_0(R\sqrt{-\lambda_1})}-\frac{2}{R\sqrt{-\lambda_2}}\frac{J_1(R\sqrt{-\lambda_2})}{J_0(R\sqrt{-\lambda_2})}}{\left(1-\frac{\nu\lambda_1}{j\omega}\right)\frac{2}{R\sqrt{-\lambda_1}}\frac{J_1(R\sqrt{-\lambda_1})}{J_0(R\sqrt{-\lambda_1})}-\left(1-\frac{\nu\lambda_2}{j\omega}\right)\frac{2}{R\sqrt{-\lambda_2}}\frac{J_1(R\sqrt{-\lambda_2})}{J_0(R\sqrt{-\lambda_2})}}\right].$$

Здесь λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения, фигурирующего в теории Кирхгофа [4], и K определяется как $\bar{p}/\bar{s}$.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ КИРХГОФА К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ЗВУКА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБАХ И ПОРАХ

Кирхгоф создал теорию распространения звука, учитывая одновременно вязкость и теплопроводность. Его теорию можно применить также и к случаю распространения звука в трубах цилиндрической формы.

Мы сначала выведем выражения для W и γ, затем из этих выражений вычислим K и ρ. Выражение для γ для высоких частот дано Кирхгофом. Просто получается также выражение для γ для *очень низких* частот. Выражение для γ для просто *низких* частот будет получено в этом параграфе путем учета более высоких приближений.

По определению $W=\bar{p}/\bar{u}$, где $\bar{p}$ и $\bar{u}$ — средние по поперечному сечению значения давления и аксиальной скорости. Точнее, $\bar{p}$ должно было бы обозначать среднюю силу на единицу поверхности, которая несколько отлична от среднего гидростатического давления. Однако разница заключается в xx — члене тензора вязкости [4], который мал по сравнению с гидростатическим давлением.

Во избежание повторения теории Кирхгофа начнем с рэлеевской трактовки этой теории, лишь несколько изменив обозначения.

Четыре основных дифференциальных уравнения предыдущего параграфа остаются в силе, и лишь в уравнении движения (2.11) добавляются члены, обусловленные трением. В результате уравнение движения, согласно Рэлею [4, § 348], будет

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\eta}{\rho_0}\Delta u-\frac{1}{3}\frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial t}.$$

Аналогичные уравнения для двух других компонент скорости v и w получаются круговой заменой.

Исключение из уравнений всех переменных, кроме θ', дает уравнение для θ', решением которого будет

$$\theta'=A_1Q_1+A_2Q_2, \tag{2.16}$$

причем

$$\Delta Q_1 = \lambda_1 Q_1, \qquad \Delta Q_2 = \lambda_2 Q_2,$$

где λ_1 и λ_2—корни квадратного уравнения [4, § 348, уравнение (19)]. В достаточно хорошем приближении

$$\lambda_1 = \left(\frac{j\omega}{c_0}\right)^2,$$

$$\lambda_2 = \frac{j\omega\,\varkappa}{\nu}.$$

Для λ_1 и λ_2 вязкость оказывается гораздо менее существенной, чем теплопроводность.

В дальнейшем мы будем рассматривать объем цилиндрической формы и предполагать, что все величины изменяются по закону $e^{-\gamma x}$ (бегущая волна). Нас будет интересовать лишь решение, имеющее цилиндрическую симметрию, так что скорость в любой точке будет задаваться аксиальной компонентой u и радиальной компонентой q.

A, A_1, A_2 — пока произвольные постоянные, а решения для u, q и θ' как функций r имеют вид [4, § 350, уравнения (8), (10)]:

$$u = AQ + A_1\gamma\left(\frac{j\omega}{\lambda_1} - \nu\right)Q_1 + A_2\gamma\left(\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu\right)Q_2, \tag{2.17}$$

$$q = A\frac{\gamma}{j\omega/\eta' - \gamma^2}\frac{dQ}{dr} - A_1\left(\frac{j\omega}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{dQ_1}{dr} - A_2\left(\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{dQ_2}{dr}, \tag{2.18}$$

$$\theta' = A_1Q_1 + A_2Q_2, \tag{2.19}$$

где

$$\eta' = \frac{\eta}{\rho_0},$$

$$Q = J_0\left(r\sqrt{\gamma^2 - \frac{j\omega}{\eta'}}\right),$$

$$Q_1 = J_0\left(r\sqrt{\gamma^2 - \lambda_1}\right),$$

$$Q_2 = J_0\left(r\sqrt{\gamma^2 - \lambda_2}\right).$$

Эти решения должны удовлетворять граничным условиям на поверхности цилиндра:

$$\left.\begin{aligned} u &= 0 \\ q &= 0 \\ \theta' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } r = R, \tag{2.20}$$

откуда и определяются величины A, A_1 и A_2. Равенство нулю детерминанта системы уравнений для определения A, A_1 и A_2 дает

$$\frac{\gamma^2 j\omega}{j\omega/\eta' - \gamma^2}\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{d\ln Q}{dr}+\left(\frac{j\omega}{\lambda_1}-\nu\right)\frac{d\ln Q_1}{dr}-$$
$$-\left(\frac{j\omega}{\lambda_2}-\nu\right)\frac{d\ln Q_2}{dr}=0. \qquad (2.21)$$

Это так называемое уравнение Рэлея [4, § 350, уравнение (11)].

Для малых значений аргумента функций Бесселя (низкие частоты) имеем в третьем приближении [4, § 350].

$$d\ln J_0(z)/dz=-\frac{1}{2}z\left(1+\frac{1}{8}z^2+\frac{1}{48}z^4\right). \qquad (2.22)$$

Подставляя это выражение в (2.21) и учитывая выражения для Q, Q_1 и Q_2, получаем уравнение, содержащее γ^0, γ^2 и γ^4, из которого может быть найдено γ^2. При этом мы будем учитывать только первые члены получающихся рядов. Это значит, что величины $j\omega\nu/c^2$, R/λ и $j\omega R^2/\eta'$ считаются пренебрежимо малыми по сравнению с единицей. В результате все члены, содержащие γ^4, уничтожаются и мы получаем

$$\gamma^2=\frac{8j\omega\eta'\varkappa}{c^2R^2}\left[1+\frac{1}{6}\frac{j\omega R^2}{\eta'}-\frac{1}{8}(\varkappa-1)\frac{j\omega R^2}{\nu}\right] \qquad (2.23)$$

(для низких частот). Это уравнение согласуется с уравнениями для ρ (2.7) и K (2.14), полученными по отдельности, если учесть соотношение $\gamma^2=(j\omega)^2\rho/K$.

Для высоких частот, согласно Рэлею [4, § 350],

$$\gamma^2=\left(\frac{j\omega}{c}\right)^2\left[1+\frac{2\sqrt{\eta'}}{R\sqrt{j\omega}}+2\left(\sqrt{\varkappa}-\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\frac{\sqrt{\nu}}{R\sqrt{j\omega}}\right], \qquad (2.24)$$

что опять согласуется с ρ и K, вычисленными по отдельности [уравнения (2.8) и (2.15)]. Найдя из (2.21) значение для γ, можно из уравнений (2.17)—(2.19) и граничных условий определить отношения A/A_1 и A/A_2.

Взяв соответствующее значение для A, найдем

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{j\omega(1/\lambda_1-1/\lambda_2)}{Q(\alpha R)},\\ A_1 &= -\frac{1}{\gamma Q_1(\alpha_1 R)},\\ A_2 &= \frac{1}{\gamma Q_2(\alpha_2 R)};\end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

$\alpha_i R$ представляет собой комплексный аргумент функций Q_i при $r=R$. Следовательно, аргумент Q в текущей точке r будет $\alpha_i r$.

Подстановка (2.25) в (2.17) дает

$$u = j\omega\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{Q(\alpha r)}{Q(\alpha R)} - \left(\frac{j\omega}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{Q_1(\alpha_1 r)}{Q_1(\alpha_1 R)} + \left(\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{Q_2(\alpha_2 r)}{Q_2(\alpha_2 R)}.$$

Величина $\overline{u}$ находится усреднением всех Q_i по поперечному сечению, что может быть выполнено так же, как и в § 2 [см. (2.4)], причем при интегрировании функция Бесселя нулевого порядка переходит в функцию Бесселя первого порядка.

Соответствующее выражение для p получается подстановкой (2.25) в (2.19), вычислением s из уравнения (2.12)

$$s = \theta' - \left(\frac{\nu}{j\omega}\right)\Delta\theta'$$

(где Δ предполагается равной соответственно λ_1 и λ_2), подстановкой значений s и θ' в выражения для p (2.10)

$$p = p_0[s + (\varkappa - 1)\theta']$$

и, наконец, усреднением по поперечному сечению с помощью (2.4). Получающаяся таким образом величина $\overline{p}$ не полностью эквивалентна силе, действующей на единицу поверхности, а представляет собой лишь гидростатическую часть силы; сюда должен быть добавлен член, учитывающий трение [4, § 345, уравнение (5)]. Однако этот член оказывается малым и в рассматриваемом приближении им можно пренебречь. В результате получаем

$$W = \frac{p_0\left(\varkappa - \frac{\nu\lambda_1}{j\omega}\right)\frac{\overline{Q}_1}{Q_1(\alpha_1 R)} - p_0\left(\varkappa - \frac{\nu\lambda_2}{j\omega}\right)\frac{\overline{Q}_2}{Q_2(\alpha_2 R)}}{-j\omega\gamma\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{\overline{Q}}{Q(\alpha R)} + \gamma\left(\frac{j\omega}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{\overline{Q}_1}{Q_1(\alpha_1 R)} - \gamma\left(\frac{j\omega}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{\overline{Q}_2}{Q_2(\alpha_2 R)}}. \quad (2.26)$$

Для того чтобы получить приближенные выражения для низких и высоких частот, сюда должны быть подставлены соответствующие выражения для $\overline{Q}_i/Q_i(\alpha_i R)$, λ_1, λ_2 и γ. Ограничиваясь главными членами, получаем для высоких частот

$$W = \rho_0 c_0\left[1 + \sqrt{\frac{\eta}{j\omega\rho_0 R^2}} - \left(\sqrt{\varkappa} - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\sqrt{\frac{\nu}{j\omega R^2}}\right]; \quad (2.27)$$

для низких частот

$$W = j\omega\left[\frac{4}{3}\rho_0 + \frac{1}{j\omega}\frac{8\eta}{R^2}\right]\Big/\gamma. \quad (2.28)$$

Из этих уравнений, а также уравнений (2.23) и (2.24) для γ и соотношений (1.17) легко получаются K и ρ. Результаты сведены в табл. 1.

Эти формулы могут быть приведены к более простому виду посредством замены $\omega\rho_0 R^2/\eta = \mu^2$ и подстановки констант для воздуха (см. табл. 2).

Таблица 1

Значения γ, W, K и ρ для цилиндров, определенные согласно теории Кирхгофа

Низкие частоты	Высокие частоты
$\mu=\sqrt{\omega\rho_0 R^2/\eta}<1$	$\mu=\sqrt{\omega\rho_0 R^2/\eta}>10$
$\gamma^2=\frac{8j\omega\eta}{p_0R^2}\left[1+\frac{j\omega\rho_0R^2}{6\eta}-\frac{1}{8}(\varkappa-1)\frac{j\omega R^2}{\nu}\right]$	$\gamma=\left(\frac{j\omega}{c_0}\right)\left[1+\sqrt{\frac{\eta}{j\omega\rho_0R^2}}+\left(\sqrt{\varkappa}-\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\sqrt{\frac{\nu}{j\omega R^2}}\right]$
$W=j\omega\left[\frac{4}{3}\rho_0+\frac{1}{j\omega}\frac{8\eta}{R^2}\right]/\gamma$	$W=\rho_0c_0\left[1+\sqrt{\frac{\eta}{j\omega\rho_0R^2}}-\left(\sqrt{\varkappa}-\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\sqrt{\frac{\nu}{j\omega R^2}}\right]$
$K=p_0\left[1+\frac{1}{8}(\varkappa-1)\frac{j\omega R^2}{\nu}\right]$	$K=\varkappa p_0\left[1-2\left(\sqrt{\varkappa}-\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\sqrt{\frac{\nu}{j\omega R^2}}\right]$
$\rho=\frac{4}{3}\rho_0+\frac{1}{j\omega}\frac{8\eta}{R^2}$	$\rho=\rho_0\left[1+2\sqrt{\frac{\eta}{j\omega\rho_0R^2}}\right]$

Таблица 2

Выражения для γ, W, K и ρ для воздуха в цилиндрах

Низкие частоты	Высокие частоты
$\mu=\sqrt{\omega\rho_0 R^2/\eta}<1$	$\mu=\sqrt{\omega\rho_0 R^2/\eta}>10$
$\gamma=\sqrt{8j\omega\eta/p_0R^2}\,(1+0{,}07j\mu^2)$	$\gamma=(j\omega/c_0)\,(1+1{,}46/\mu\sqrt{j})$
$\gamma W=\frac{4}{3}j\omega\rho_0\,(1+6/j\mu^2)$	$W=\rho_0c_0\,(1+0{,}54/\mu\sqrt{j})$
$K=p_0\,(1+0{,}028j\mu^2)$	$K=\varkappa p_0\,(1-0{,}92/\mu\sqrt{j})$
$\rho=\frac{4}{3}\rho_0\,(1+6/j\mu^2)$	$\rho=\rho_0\,(1+2/\mu\sqrt{j})$
$\operatorname{tg}\delta_\rho\cdot\operatorname{tg}\delta_K=0{,}16$	$\operatorname{tg}\delta_K=0{,}46\operatorname{tg}\delta_\rho$

Резюмируя теоретические результаты для ρ, K, W и γ, полезно отметить, что подсчет ρ и K по отдельности дает правильные результаты для низких и высоких частот. Можно предположить, что эти формулы справедливы и для случая промежу-

точных частот. В принципе это можно проверить, подсчитав $\gamma = j\omega\sqrt{\rho/K}$ из выражений для ρ и K, что дает

$$\gamma^2 = \left(\frac{j\omega}{c_0}\right)^2 \frac{1 + \frac{2}{B\mu\sqrt{-j}}(\varkappa - 1)\frac{J_1(B\mu\sqrt{-j})}{J_0(B\mu\sqrt{-1})}}{1 - \frac{2}{\mu\sqrt{-j}}\frac{J_1(\mu\sqrt{-j})}{J_0(\mu\sqrt{-j})}},$$

и сравнив это выражение с выражением, данным Рэлеем [4, § 350, уравнение (11)]; однако такое сравнение представляет собой трудную задачу.

Различными исследователями были поставлены опыты с целью проверки теоретических результатов Гельмгольца — Кирхгофа. Сводку данных можно найти у Вуда [5], где показано, что теория и эксперимент находятся в хорошем согласии. Эксперименты авторов данной книги и Ван-Ден-Эйка [6] приводят к тому же выводу, хотя они и менее точны, чем эксперименты Кая и Шеррата [7].

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ КИРХГОФА ДЛЯ ПОРИСТЫХ СРЕД

Рассмотрим вопрос о том, в какой степени приведенные в табл. 1 результаты могут быть применены в реальных случаях пористых сред. Предположения теории выполняются в точности лишь для среды с порами цилиндрической формы одинакового диаметра, пронизывающими материал насквозь, чего в действительности, конечно, не происходит. В случае обычных материалов, особенно когда поперечное сечение пор существенно меняется по длине, возникают большие трудности. Для применения результатов, приведенных в табл. 1, к материалам с порами одинакового диаметра необходимо K разделить на h, а ρ умножить на k/h. Углы потерь δ_ρ и δ_K будут, очевидно, оставаться неизменными, так как в каждой отдельной поре распространение происходит так же, как предполагалось при выводе табл. 1, и, следовательно, отношение сил трения к силам инерции и силам упругости, т. е. $\operatorname{tg}\delta_\rho$ и $\operatorname{tg}\delta_K$ соответственно, будут неизменны для всего материала в целом.

На практике нетрудно определить, какой вид механизма распространения должен иметь место: Пуазейля — Кирхгофа или Гельмгольца — Кирхгофа. Для этого необходимо вычислить μ из соотношения

$$\mu = \sqrt{\frac{\omega\rho_0 R^2}{\eta}} = \sqrt{\frac{8\omega k\rho_0}{h\sigma_{\text{стат.}}}}$$

[см. (1.26)]. Здесь величины h и $\sigma_{\text{стат.}}$ берутся из измерений, k находится из резонансной частоты поглощающего слоя или, при

грубой оценке, просто принимается равным 3. При $\mu < 1$ имеет место распространение типа Пуазейля — Кирхгофа, а при $\mu > 10$ — Гельмгольца — Кирхгофа.

Теория неприменима к средам, содержащим поры, поперечное сечение которых значительно меняется вдоль их длины. Действительно, рассмотрим крайний случай, когда материал имеет сравнительно широкие поры, соединенные между собой очень узкими порами. Воздушное сопротивление в этом случае обусловливается в основном узкими порами, течение в которых имеет пуазейлевский характер. Величина же модуля упругости воздуха определяется интенсивностью теплообмена воздуха со скелетом материала, и так как значительная часть воздуха заключена в сравнительно больших порах, то теплообмен может оказаться весьма незначительным, в результате чего будет справедлива теория Гельмгольца — Кирхгофа.

Следовательно, может оказаться, что $1 < \mu < 10$ и в то же время ρ будет даваться первым столбцом табл. 1, а K — вторым. Другими словами, в этом случае имеет место почти изотермическое движение с модулем сжатия, близким к адиабатическому, так как потери вследствие вязкости концентрируются в основном в узких порах, а тепловые потери — в широких порах.

Таким образом,

а) если вычисление с использованием $\sigma_{\text{стат.}}$ дает $\mu = 1$, то значение $\operatorname{tg}\delta_\rho$ можно получить из закона Пуазейля, но при этом $\operatorname{tg}\delta_K$ может быть значительно больше $0{,}028\,\mu^2$; это имеет весьма важное значение для поглощения низких частот;

б) если $\mu = 2$, что может иметь место вблизи границы применимости закона Пуазейля, то δ_K может иметь величину, близкую к максимальной (0,1 — 0,2);

в) при $\mu > 20$ теория Гельмгольца — Кирхгофа применима для вычисления как $\operatorname{tg}\delta_K$, так и $\operatorname{tg}\delta_\rho$; можно пользоваться вторым столбцом табл. 1 (но с заменой K на hK и ρ на $h\rho/k$).

Грубая оценка μ при 500 *гц* дает для

акустической штукатурки	$\sigma=5\cdot10^3—10^5$,	$k/h=4$,	$\mu=4{,}5—1$
волосяного войлока	$\sigma=5\cdot10^4—10^6$,	$k/h=3$,	$\mu=1\ —0{,}3$
панели из древесного волокна . .	$\sigma=5\cdot10^5—10^7$,	$k/h=3$,	$\mu=0{,}3—0{,}1$

Мы видим, что случаи «а» и «б» могут осуществляться, т. е. процесс может быть изотермическим, в то время как $\operatorname{tg}\delta_K$ может иметь большее значение, чем даваемое в первом столбце табл. 1.

Как мы увидим в дальнейшем, комплексные величины ρ и K, а следовательно, и соответствующие углы потерь могут быть получены из измерений импеданса, что дает возможность опытной проверки теоретических результатов. Попутно может быть

решен следующий вопрос (имеющий, правда, лишь академическую важность). В уравнение движения был введен структурный фактор k; однако казалось невозможным определить, чем он обусловлен — наклонными порами или же боковыми отверстиями. Теперь же можно сказать, что если преобладают наклонные поры, то опытное значение K должно совпадать с даваемым в табл. 1, если же боковые отверстия более важны, то требуемая величина μ для K будет больше, чем для ρ.

Результаты, изложенные в этом параграфе, могли бы быть получены также при предположении, что теплопроводность λ_h *в несколько раз меньше действительной теплопроводности.* Это приводит к сдвигу K вдоль контура (см. фиг. 17, *б*) в направлении его адиабатического значения, обусловливая большее значение δ_K при низких частотах и меньшее значение при высоких частотах. Отношение кажущейся теплопроводности $\lambda_{\text{каж.}}$ к нормальной величине теплопроводности λ_h должно рассматриваться как новая «постоянная» материала. Она будет зависеть от частоты и структуры материала и должна определяться из опыта.

§ 6. ОБСУЖДЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ КОРРИНГА, КРОНИГА И СМИТА

Для описания акустических свойств материалов с идеально цилиндрическими порами достаточно трех величин: h, k и σ. В практических случаях, однако, должна быть введена четвертая постоянная, равная отношению $\lambda_{\text{каж.}}/\lambda_h$ (< 1). Необходимость введения этой постоянной очевидна, и ее физический смысл достаточно прост. Однако введение в теорию нового, чисто эмпирического, параметра делает ее значительно менее изящной.

Последовательный метод теоретического расчета был предложен Корринга, Кронигом и Смитом [8]. К сожалению, этот метод весьма сложен и применим лишь к некоторым простейшим случаям. Авторы рассматривали распространение звука в среде, состоящей из сфер, расположенных в узлах кубической решетки, учитывая эффекты вязкости и теплопроводности в рамках теории Кирхгофа. Распространение звука в среде такого вида без учета затухания было исследовано Рэлеем [9].

Корринга, Крониг и Смит представили свои результаты в виде нескольких простых графиков, на которых γ (без учета фактора $j\omega/c_0$) и $W/\rho_0 c_0$ изображены в виде функций частоты для различных радиусов сфер и расстояний между сферами (пористости). Для параметра $\lambda_{\text{каж.}}/\lambda_h$ они дают для этой идеализированной среды следующие значения:

Таблица 3

k и $\lambda_{каж.}/\lambda_h$ по теории Корринга, Кронига и Смита для среды, состоящей из сфер

h	Диаметр / Расстояние	k	$\lambda_{каж.}/\lambda_h$
0,85	0,66	1,1	0,45
0,75	0,78	1,1	0,45
0,65	0,87	1,2	0,45
0,55	0,95	1,2	0,45
0,48	1,00	1,3	0,45

Численные значения фаз ρ и K для частот, рассмотренных Корринга и др., заставляют думать, что мы находимся в гельмгольцевской области. Согласно нашей схеме, волновой импеданс при высоких частотах должен быть в $\sqrt{k/h}$ раз больше $\rho_0 c_0$, и так как h известно, то отсюда может быть вычислено k. В результате действительно получается правильное по порядку величины значение. K и ρ можно вычислить из γ и W. Для нас большое значение имеет отношение $\operatorname{tg}\delta_K/\operatorname{tg}\delta_\rho$. По Кирхгофу, для случая труб эта величина равна 0,46, в общем случае она должна быть равна $0{,}46\sqrt{\lambda_{каж.}/\lambda_h}$.

Результаты, полученные в рассматриваемой работе, дают для $\lambda_{каж.}/\lambda_h$ примерно 0,4—0,5, что является вполне разумной величиной для данного случая. Так как мы находимся в гельмгольцевской области, то, следовательно, поправка, введенная Кирхгофом, в 2 раза меньше, чем в случае труб. С другой стороны, это полностью оправдывает предположение о том, что роль теплообмена в более важном случае пуазейлевского течения увеличивается благодаря непостоянству поперечного сечения пор.

§ 7. ПОРИСТЫЕ МАТЕРИАЛЫ С ВЫСОКИМ ВОЗДУШНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ($\mu < 2$)

Перейдем теперь к рассмотрению поглощения звука в средах при малых и больших μ, учитывая при этом также введенное выше отношение теплопроводностей. Напомним, что величина ν пропорциональна теплопроводности.

Общее выражение (1.14) для импеданса слоя толщины l

$$z = \sqrt{K\rho}\,\operatorname{cth} j\omega l\sqrt{\rho/K}$$

может быть записано для малых величин аргумента (значительно ниже резонанса) в виде

$$z=\frac{K}{j\omega l}+\frac{j\omega l\rho}{3}\,. \tag{2.29}$$

При $x \ll 1$ имеем

$$\operatorname{cth} x=\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\,. \tag{2.30}$$

Уравнение (2.29) представляет собой импеданс массы $l\rho/3$, соединенной с упругостью K/l. Таким образом, эффективная масса слоя на единицу поверхности оказывается равной $^1/_3$ полной массы.

В случае $\mu<1$ значения K и ρ могут быть взяты из первого столбца табл. 1 (с h и k!), что для воздуха дает

$$\frac{z}{\rho_0 c_0}=\frac{\sigma l}{3\rho_0 c_0}\left[1+\left(\frac{3\rho_0 c_0}{\sigma l}\right)^2\frac{\lambda_h}{\lambda_{\text{каж.}}}\frac{k}{20h^2}\right]+\frac{p_0}{j\omega l\rho_0 e_0 h}+$$

$$+\frac{j\omega l\cdot\frac{4}{3}\rho_0}{3\rho_0 c_0}=\frac{R-jX}{\rho_0 c_0}\,, \tag{2.31}$$

где σ — сопротивление для случая стационарного потока. Следует помнить, что c_0 — скорость звука в свободном воздухе, равная $c_0=\sqrt{\varkappa p_0/\rho_0}$. При частотах, значительно ниже резонансных, реактивным членом в X, содержащим массу, можно пренебречь. Слой ведет себя как упругость с потерями. Далее мы имеем

$$X=\frac{p_0}{\omega l h}\,, \tag{2.32}$$

т. е. X не зависит ни от k, ни от σ. Это полностью соответствует экспериментальным данным (фиг. 18). Коэффициент поглощения при таких частотах приблизительно пропорционален R

$$a_0\approx\frac{4\rho_0 c_0 R}{X^2}\,. \tag{2.33}$$

При изменении σ, R проходит через минимум. Как правило (поскольку $\lambda_h k/\lambda_{\text{каж.}}\,20h^2\approx 1$), $R_{\text{мин.}}=2\rho_0 c_0$, что на комплексной плоскости z соответствует вертикальной линии, проходящей на расстоянии $2\rho_0 c_0$ от мнимой оси. В частном случае ($\lambda_{\text{каж.}}=\lambda_h$, $k=1$, $h=1$) $R_{\text{мин.}}\approx\frac{1}{2}\rho_0 c_0$.

Взяв X из (2.32) и предположив, что $R_{\text{мин.}}=\rho_0 c_0$, получим из уравнения (2.33)

$$a_{\text{мин.}}=\left(\frac{2\varkappa\omega l h}{c_0}\right)^2.$$

Уместно подчеркнуть, что выражения (2.29) и (2.31) справедливы лишь в случаях, когда одновременно применим закон Пуазейля (ориентировочно $\omega < h\sigma/2k\rho_0$) и допустимо разложение cth в ряд (ориентировочно $\omega < p_0/\sigma h l^2$). Более низкая из этих частот соответствует, очевидно, пределу применимости теории.

Для материалов с низким σ (штукатурки) первое условие является более жестким и соответствует предельным частотам порядка 50—1000 *гц*. С другой стороны, для материалов с высоким σ первое условие удовлетворяется при всех слышимых частотах, второе же условие выполняется лишь при очень низких частотах (10 *гц* для очень больших σ). Применимость (2.29) легко оценить с помощью комплексной плоскости. Как видно из (2.29), все импедансы, для которых применимо это уравнение, должны иметь мнимую часть, приблизительно в полтора раза превышающую действительную, т. е. фаза должна лежать между —55 и —90°.

Поправка для R, обусловленная эффектом Кирхгофа [квадратные скобки в (2.31)], имеет значение только тогда, когда $\sigma l < 5\rho_0 c_0$. В табл. 4 приведена величина этой поправки для некоторых материалов. Когда сопротивление σ мало, поправка имеет большое значение [10].

Таблица 4

Ориентировочные данные для величины поправки Кирхгофа в пуазейлевской области (l=0,02)

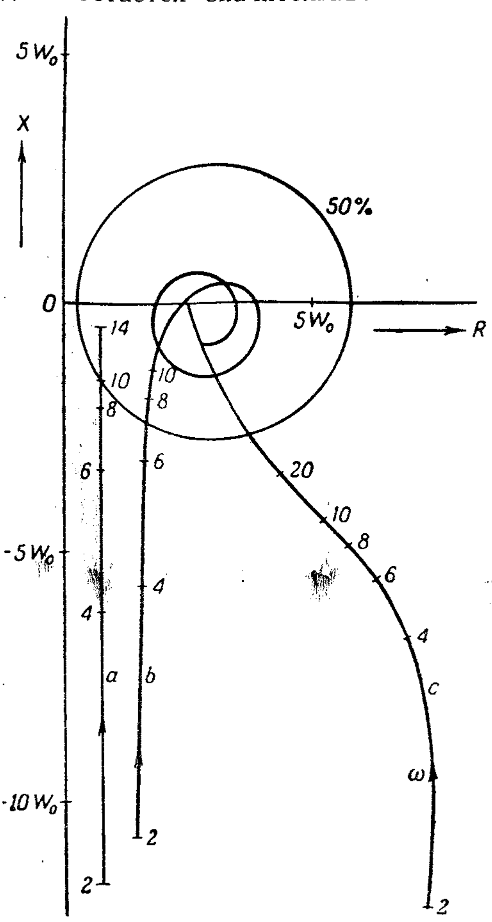
Материал	Поправочный множитель
Штукатурки	25—100
Войлок	1—2
Древесная вата	1

При больших значениях ω, как известно, cth стремится к единице, причем ρ становится почти чисто мнимым. Зависимость cth от частоты изображается в виде контура (см. фиг. 7). При $\operatorname{cth}\gamma l = 1$, z будет приблизительно равен волновому импедансу

$$z = \sqrt{K_r \rho_r}\sqrt{1 - j\operatorname{tg}\delta_\rho}\,.$$

Контур функции вида $\sqrt{1 - jf(\omega)}$ представляет собой гиперболу с взаимно ортогональными асимптотами (см. фиг. 4, нижняя ветвь), чем и объясняется форма верхней части кривой c на фиг. 18. Сказанное выше относится к материалам, имеющим весьма большие сопротивления σ. При низких частотах поглоще-

ние в этих материалах относительно велико, но оно не может достигать очень высоких значений a_0 даже при высоких частотах, так как волновой импеданс остается значительным. Материалы с меньшими σ ведут себя так, как показано на фиг. 18 (кривые a и b). При высоких частотах закон Пуазейля несправедлив; при этом cth имеет максимумы и минимумы (см. фиг. 5, 8, 9), что дает спиралевидный импедансный контур, а поглощение звука имеет хорошо выраженные максимумы и минимумы. Кривая a на фиг. 18 соответствует волосяному войлоку толщиной приблизительно 20 *мм*, а кривая c — панелям из древесного волокна.



Фиг. 18. Полученные из опыта, но несколько сглаженные импедансные контуры. Указаны частоты в сотнях герц.

§ 8. ПОРИСТЫЕ МАТЕРИАЛЫ С НИЗКИМ ВОЗДУШНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ($\mu > 20$)

Как и в предыдущем параграфе, импеданс слоя l, граничащего с твердой стенкой, выражается уравнением (1.14), а уравнение (2.29) является его аппроксимацией для низких частот. При этом поскольку модуль ρ много меньше, чем в случае $\mu < 2$, эта аппроксимация справедлива теперь для более высоких частот. Кроме того, учтем, что K и ρ имеют фазы δ_K и δ_ρ одного и того же порядка, в то время как модуль массового импеданса при низких частотах незначителен по сравнению с модулем K. Следовательно, отбрасывая член, содержащий ρ, получим для низких частот

$$z = \frac{K}{j\omega l} = \frac{\varkappa p_0}{\omega l h}\left[0{,}23\sqrt{\frac{h\sigma_{\text{стат.}}}{\omega k \rho_0}} - j\right],$$

откуда вытекает, что коэффициент поглощения пропорционален $\sqrt{\omega}$. Конечно, эта зависимость не может быть продолжена до самых низких частот, так как гельмгольцевский механизм при этом переходит в пуазейлевский. В этом случае действительная часть z меняется как $\omega^{-3/2}$, обусловливая искривленный импедансный контур, часто встречающийся при низких частотах у материалов с очень низким сопротивлением.

Для более высоких частот, сохраняя только главные члены и не учитывая в волновом импедансе не имеющие значения малые углы потерь, получаем

$$z=\sqrt{K_r\rho_r}\,\mathrm{cth}\left\{j\omega l\sqrt{\frac{\rho_r}{K_r}}\left[1-j\left(1+0{,}46\sqrt{\frac{\lambda_{\text{каж.}}}{\lambda_h}}\right)\frac{\delta_\rho}{2}\right]\right\}.$$

В комплексной плоскости этот импеданс изображается спиралью с малым параметром, меньшим чем $0{,}73\delta_\rho$. В этом случае, поскольку δ_ρ пропорционально $\omega^{-1/2}$, параметр постепенно уменьшается, хотя предельная окружность, как на фиг. 9, здесь отсутствует. Для очень больших ω z приближается к значению

$$z=\sqrt{K_r\rho_r}=\frac{1}{h}\sqrt{k}\rho_0 c_0\approx(\text{от 2 до 3})\,\rho_0 c_0;$$

следовательно, коэффициент поглощения будет иметь очень резко выраженные максимумы и минимумы около величины, составляющей приблизительно 80% (почти независимо от рассматриваемого материала).

k может быть определено из резонансных частот, для которых

$$\omega_{\text{рез.}}\,l\sqrt{\frac{\rho_r}{K_r}}=\omega_{\text{рез.}}\,l\frac{\sqrt{k}}{c_0}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\ \text{и т. д.},$$

или из антирезонансных частот, для которых

$$\omega_{\text{антирез.}}\,l\frac{\sqrt{k}}{c_0}=\frac{\pi}{2},\ \pi\ \text{и т. д.}$$

§ 9. ОПЫТНАЯ ПРОВЕРКА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Правильность теоретических выводов может быть проверена экспериментально путем измерения импеданса слоя толщины l. Если бы волновой импеданс и постоянная γ, использованные для теоретического вывода выражения для z, были вполне точны, мы получили бы хорошее согласие с экспериментом. Однако этого согласия, вообще говоря, не получается, причем точно причину расхождения указать трудно. Хорошим методом изучения материала является получение комплексных величин K и ρ

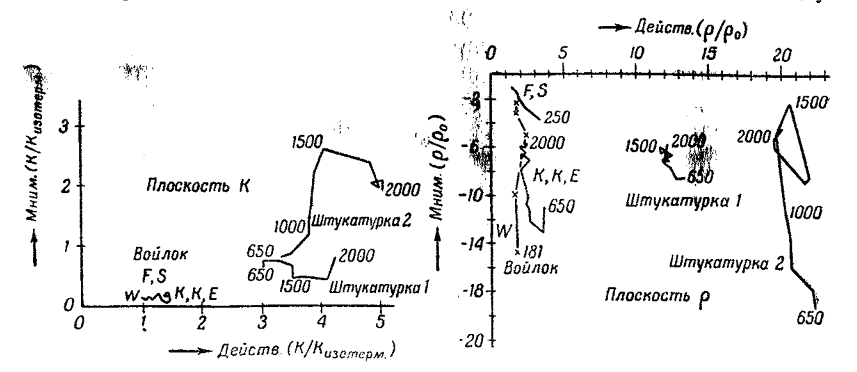
из данных эксперимента. Причину расхождения экспериментальных и теоретических значений K и ρ определить легче, чем найти причину несовпадения экспериментального и теоретического значений импеданса слоя толщины l, так как K и ρ более тесно связаны с основными предположениями о структуре материала, чем z.

Аналогичный путь широко применяется в электротехнике. К исследованию распространения звуковых волн он впервые был применен Вюстом [11].

Из опытных данных K и ρ вычисляются по следующей схеме:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = W \operatorname{cth} \gamma l \\ z_2 = W \operatorname{th} \gamma l \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} W = \sqrt{z_1 z_2} \\ \operatorname{cth} \gamma l = \sqrt{\dfrac{z_1}{z_2}} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} K = j\omega \dfrac{W}{\gamma} \\ \rho = \dfrac{W\gamma}{j\omega}, \end{array}$$

где z_1 и z_2 являются опытными значениями соответственно для слоя, ограниченного твердой стенкой, и для столба воздуха



Фиг. 19. Результаты измерений комплексных упругости и плотности.

в одну четверть длины волны [см. уравнения (1.5) и (1.6)]. Как мы видим, W определяется произведением $z_1 z_2$, а γ — отношением z_1/z_2. Вычисление K и ρ из W, γ и K, ρ производится по хорошо известным формулам (1.17); хотя, повидимому, нет сомнения, что этот путь наиболее многообещающий, в этом направлении было проведено всего лишь несколько экспериментов.

На фиг. 19 дан общий обзор немногих имеющихся результатов. Буквой W отмечены результаты Вюста, буквами F, S — результаты Ферреро и Сакердоте [12], буквами K, K, E — Костена, Костелейна и Ван-Ден-Эйка (данные не опубликованы).

Вюст, Ферреро и Сакердоте приводят данные только для войлока, в то время как результаты последней группы исследователей (Костен и др.) содержат также данные для акустических

штукатурок. Впрочем, последние результаты менее надежны вследствие того, что образцы штукатурки были недостаточно однородны.

Все кривые для ρ имеют тенденцию повышаться с увеличением частоты, что и нужно было предполагать (см. фиг. 17, *а*). Во всех случаях, исключая случай F,S, действительная часть ρ почти постоянна, откуда следует, что структурный фактор является константой. Из данных Ферреро и Сакердоте следует уменьшение структурного фактора с возрастанием частоты. Для войлока структурный фактор равен примерно 2. Полученное из опыта значение модуля сжатия K войлока лежит где-то между изотермической и адиабатической величинами. В опытах Вюста он ближе к адиабатической величине. Угол потерь δ_K по данным F, S имеет вблизи максимума значение, согласующееся со значением δ_ρ.

Общий характер результатов Вюста для войлока тот же, что и у Костена и др. Сопротивление по Вюсту оказывается несколько меньшим, что дает теоретически ожидаемую частотную зависимость K'. Однако весьма точные результаты Ферреро и Сакердоте существенно отличаются даже в качественном отношении. Теоретическое объяснение этого расхождения дать трудно. Поскольку $\operatorname{tg}\delta_\rho$ порядка единицы, можно было бы ожидать весьма сильную зависимость K от частоты, чего, однако, не наблюдается.

Поведение образцов штукатурки 1 и 2 сложнее. Из действительной части ρ, равной $k\rho_0/h$, получаются значения k/h, равные соответственно 12,5 и 21. Действительная часть K пропорциональна $1/h$. Взяв среднее значение между изотермическим и адиабатическим, получаем величину h, равную соответственно 0,34 и 0,3. Следовательно, структурный фактор должен быть приблизительно равен 4,2 и 6,3, что является разумной величиной. Значения h (весьма низкие) отличаются от статической величины (около 0,7). Это обусловливается тем, что в статических измерениях играют роль все полости, в то время как в колебательном режиме воздух в некоторых из них остается в покое. Этим же объясняются и другие особенности кривых. Так, в случае штукатурки 2 δ_K много больше ее теоретического максимума. Кроме того, изменение действительной части K значительнее, чем можно ожидать при переходе от $K_{\text{изотерм.}}$ к $K_{\text{адиаб.}}$ (1 : 1,4). Очевидно, эффективная пористость уменьшается с частотой, что сопровождается дополнительными потерями в K.

Сравним теперь углы потерь с их значениями, вычисленными по измерениям сопротивления $\sigma_{\text{стат.}}$ в постоянном потоке. Оказывается, что эти значения совпадают для δ_ρ; вычисленная же величина δ_K меньше измеренной. Поскольку δ_ρ для штукатурок сравнительно мало, связь между δ_ρ и $\sigma_{\text{стат.}}$ для случая Гельмгольца—

Кирхгофа будет

$$\operatorname{tg} \delta_\rho = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{стат.}}}{4\omega\rho_r}}$$

[см. (1.26) и (2.8), учитывая, что $\rho_r = k\rho_0/h$]; δ_K может быть вычислена по формуле

$$\operatorname{tg} \delta_K = 0,46 \operatorname{tg} \delta_\rho.$$

Результаты приведены в табл. 5, где видно хорошее совпадение для случая δ_ρ.

Таблица 5

Вычисленные и измеренные углы потерь при 1500 гц для штукатурок

Номер штукатурки	$\sigma_{\text{стат.}}$	ρ_r	$\operatorname{tg} \delta_\rho$		$\operatorname{tg} \delta_K$	
			вычисл.	измерен.	вычисл.	измерен.
1	5500	12	0,11	0,1	0,05	0,15
2	34000	24	0,19	0,15	0,1	0,5

Глава III

ТЕОРИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ ЗВУКА ПОРИСТЫМИ СЛОЯМИ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ СКЕЛЕТА

§ 1. ПОРИСТЫЕ МАТЕРИАЛЫ С УПРУГИМ СКЕЛЕТОМ [13, 14]

При учете податливости материала возникает математическая задача о совместных колебаниях скелета и воздуха. Рассмотрению этой проблемы посвящены настоящий и следующие параграфы. Всем величинам, относящимся *к скелету*, будем приписывать индекс 1, а величинам, относящимся *к воздуху*, — индекс 2. Введем обозначения:

p_1 — сила, действующая на скелет, отнесенная к единице поперечного сечения материала;

v_1 — средняя скорость материала (скелета) в точке x;

ρ_1 — плотность материала (масса пористого материала, заключенная в единице объема);

K_1 — модуль упругости скелета (в общем случае комплексная величина);

p_2 — *избыточная* (по сравнению с равновесной) сила, действующая на воздух, отнесенная к единице поперечного сечения образца; p_2 в $1/h$ раз меньше звукового давления в точке x, где h — пористость;

v_2 — средняя скорость воздуха в точке x; она в $1/h$ раз больше объемной скорости, встречавшейся до сих пор;

ρ_2 — плотность воздуха (масса воздуха, содержащаяся в единице объема материала); она равна h, умноженному на плотность свободного воздуха;

K_2 — обычный модуль упругости воздуха; при наличии потерь (термических или вязких) он будет комплексной величиной;

P_0 — полное равновесное давление воздуха;

P — полное давление воздуха с учетом колебаний;

s — коэффициент связи (будет определен позднее).

Имеем следующие уравнения движения:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x}=\rho_1\frac{\partial v_1}{\partial t}+s(v_1-v_2), \tag{3.1}$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial x}=\rho_2\frac{\partial v_2}{\partial t}+s(v_2-v_1). \tag{3.2}$$

Первый член в правой части (3.1) представляет собой силу инерции, а второй член — силу, с которой воздух действует на ске-

лет, отнесенную к единице объема материала, если $v_1 \neq v_2$. При этом s определяется как сила, действующая на единицу объема при разности между скоростями в скелете и в воздухе, равной единице. Согласно закону действия и противодействия, в уравнении движения воздуха (3.2) имеется такой же член, но с противоположным знаком.

Коэффициент связи s может быть выражен через известные величины. При $v_1 = 0$ уравнение (3.2) должно переходить в (1.23). Сравнивая их, найдем

$$s = j\omega\rho_2(k-1) + h^2\sigma, \qquad (\rho_2 = h\rho_0). \tag{3.3}$$

Мы видим, что связь имеется, даже если $\sigma = 0$.

Уравнения непрерывности, как можно показать, записываются следующим образом:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t} = K_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{1-h}{h} \frac{\partial p_2}{\partial t}, \tag{3.4}$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial t} = hK_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + (1-h)(K_2 - P_0) \frac{\partial v_1}{\partial x}. \tag{3.5}$$

Первое уравнение выражает тот факт, что сила в скелете возрастает как при сжатии твердого вещества, так и при сжатии воздуха. Член, содержащий K_1, обусловлен упругостью скелета. Он присутствовал бы и в вакууме. Необходимость появления второго члена можно показать следующим образом.

Предположим, что в некоторой точке материала $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ обращается в нуль. Кроме того, если предположить, что при гидростатическом давлении скелет не деформируется (для чего можно сравнить, например, образец в вакууме и в воздухе), то ясно, что p_1 при $\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$ должно возрастать вместе с p_2. И действительно, $p_1/(1-h)$ и p_2/h являются давлениями (в твердом материале и в воздухе соответственно), которые при $\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$ должны меняться одинаковым образом.

Из уравнения (3.5) следует, что давление воздуха увеличивается как при сжатии воздуха, так и при сжатии скелета. Первый член в правой части уравнения возникает вследствие сжатия воздуха, второй—вследствие сжатия скелета. Уравнение (3.5) может быть получено следующим образом:

$$p_2 = hP - h_0P_0, \tag{3.6}$$

так как p_2 представляет собой полную силу за вычетом силы в равновесном состоянии.

Далее

$$\rho_2 = h\rho, \tag{3.7}$$

где ρ—переменная плотность воздуха.

P и ρ связаны через модуль сжатия воздуха (в общем случае комплексный)

$$\frac{dP}{K_2}=\frac{d\rho}{\rho_0}.$$

Отсюда с помощью уравнений (3.6) и (3.7) получаем

$$\frac{1}{h}\frac{\partial p_2}{\partial t}-\frac{P_0}{h}\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{K_2}{\rho_2}\left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t}-\frac{\rho_2}{h}\frac{\partial h}{\partial t}\right).$$

Здесь $\frac{\partial h}{\partial t}$ можно заменить на $(1-h)\frac{\partial v_1}{\partial x}$, а $\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$ на $-\rho_2\frac{\partial v_2}{\partial x}$, в результате чего и получается уравнение непрерывности для воздуха (3.5).

Физический смысл уравнения (3.5) вытекает из следующих соображений. Пусть в бесконечно малом объеме тела вследствие того, что $\frac{\partial v_1}{\partial x}\neq 0$, плотность твердого материала возрастает. При этом возрастает и *давление* воздуха. *Сила* p_2, если имеет место изотермическое сжатие, при этом не изменится, так как давление увеличивается во столько же раз, во сколько уменьшается пористость. В самом деле, второй член правой части уравнения (3.5) в этом случае исчезает, так как при изотермическом сжатии $K_2=P_0$. Это будет иметь место при низких частотах. При этом рассмотрение значительно упрощается. Однако поскольку мы не ограничиваемся этим случаем, то в дальнейшем будем рассматривать полное уравнение.

§ 2. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УПРУГИМ СКЕЛЕТОМ

Для того чтобы найти выражение для бегущей синусоидальной волны, в выражениях (3.1), (3.2), (3.4) и (3.5) заменим $\frac{\partial}{\partial x}$ на $-\gamma$ и $\frac{\partial}{\partial t}$ на $j\omega$. При этом $j\omega$ задано, а величина γ должна быть найдена. В результате мы найдем затухание и скорость распространения волны.

Упомянутые выше уравнения движения и непрерывности образуют систему из четырех линейных однородных уравнений относительно p_1, p_2, v_1 и v_2, которая имеет решение только в том случае, если детерминант, составленный из коэффициентов уравнений, равен нулю. Отсюда мы и получаем уравнение для определения γ. Если обозначить

$$\left.\begin{aligned}\Gamma&=\frac{\gamma}{j\omega} && \left(=\frac{1}{\text{комплексная скорость звука}}\right),\\ S&=\frac{s}{j\omega} && (=\text{эффективной плотности воздуха}),\end{aligned}\right\}\quad(3.8)$$

то этот детерминант запишется

$$D=\begin{vmatrix} \overset{p_1}{\Gamma} & \overset{p_2}{0} & \overset{v_1}{-(\rho_1+S)} & \overset{v_2}{S} \\ 0 & \Gamma & S & -(\rho_2+S) \\ -1 & \frac{1-h}{h} & K_1\Gamma & 0 \\ 0 & -1 & (1-h)(K_2-P_0)\Gamma & hK_2\Gamma \end{vmatrix} \tag{3.9}$$

Приравнивая D к нулю, получаем

$$\Gamma^4-\Gamma^2\left[\frac{h\rho_1+S}{hK_1}+\frac{\rho_2+S}{hK_2}+\frac{\rho_2(1-h)+S}{hK_1K_2}\frac{(1-h)(K_2-P_0)}{h}\right]+ \\ +\frac{\rho_1\rho_2+(\rho_1+\rho_2)S}{hK_1K_2}=0. \tag{3.10}$$

Поскольку в уравнение (3.10) входят только четные степени Γ, его четыре корня будут иметь вид $\pm\Gamma'$ и $\pm\Gamma''$. Отрицательные корни можно не рассматривать, так как они относятся к волнам, распространяющимся в отрицательном направлении x. Мы видим, что в положительном направлении x будут распространяться две волны. Амплитуда каждой из волн определяется граничными условиями. Следует заметить, что эти волны нельзя рассматривать как волну в воздухе и волну в скелете по отдельности. Волна, задаваемая Γ', распространяется как в воздухе, так и в скелете; то же самое можно сказать и о волне, соответствующей Γ''.

Довольно хорошую аналогию этому можно найти в оптике при рассмотрении двоякопреломляющих сред. При падении волны на такую среду получаются две преломленные волны.

В частных случаях Γ' или Γ'' могут быть численно равными постоянным распространения волны соответственно в воздухе и в скелете в отдельности. Это имеет место в случае слабой связи. Однако волна с таким Γ в воздухе всегда сопровождается волной с таким же Γ в скелете, и наоборот.

Так как Γ равно Γ' или Γ'', то из уравнений для p_1, p_2, v_1 и v_2 [коэффициенты для которых могут быть взяты из (3.9)] можно вычислить отношения между p_1, p_2, v_1 и v_2 и, в частности, p_1/v_1 и p_2/v_2. Последние отношения имеют характер парциальных волновых импедансов. Так как Γ может принимать два значения, то и все отношения будут иметь два значения. Поэтому мы будем различать четыре волновых импеданса:

$$\left.\begin{aligned} W_1'&=\left(\frac{p_1}{v_1}\right)'; & W_1''&=\left(\frac{p_1}{v_1}\right)''; \\ W_2'&=\left(\frac{p_2}{v_2}\right)'; & W_2''&=\left(\frac{p_2}{v_2}\right)''. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Величины отношений $(v_2/v_1)'$ и $(v_2/v_1)''$ определяют, к какому типу нужно отнести ту или другую волну. Тот тип волны, для которого это отношение меньше, является волной, в которой возмущение в основном переносится по скелету. Волна с большим отношением соответствует распространению в основном по воздуху, поскольку v_2 — скорость частиц воздуха.

Из четырех основных уравнений можно найти отношение двух любых из рассматриваемых величин. Так, для W_1, W_2 и v_2/v_1 получаются следующие выражения:

$$W_1 = \frac{p_1}{v_1} = \frac{\rho_1\rho_2 + (\rho_1+\rho_2)S + SK_1\Gamma^2 h/(1-h)}{[\rho_2 + S/(1-h)]\,\Gamma} =$$

$$= \Gamma\frac{-(1-h)SK_2 + hK_1K_2\Gamma^2 - \rho_2K_1 - SK_1 - (1-h)^2(\rho_2+S)(K_2-P_0)/h}{hK_2\Gamma^2 - \rho^2 - S}, \quad (3.12)$$

$$W_2 = \frac{p_2}{v_2} = \frac{\rho_1\rho_2 + (\rho_1+\rho_2)S - \rho_2K_1\Gamma^2 - SK_1\Gamma^2}{(-K_1\Gamma^2 + S/h + \rho_1)\,\Gamma} =$$

$$= \frac{(\rho_2+S)(1-h)(K_2-P_0)\Gamma + hK_2S\Gamma}{(1-h)(K_2-P_0)\Gamma^2 + S}, \quad (3.13)$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-hK_1\Gamma^2 + h\rho_1 + S}{(1-h)\rho_2 + S} = \frac{(1-h)(K_2-P_0)\Gamma^2 + S}{-hK_2\Gamma^2 + \rho_2 + S}. \quad (3.14)$$

Отсюда вытекают все частные случаи. При $K_1 = \infty$ получаем случай акустических штукатурок; случай $S = \infty$ соответствует материалам с высоким воздушным сопротивлением или обычным материалам при экстремально низких частотах [см. уравнения (3.3) и (3.8)]. При низких частотах K_2 принимает изотермическое значение P_0. При высоких частотах $S = (k-1)\rho_2$, а для K_2 можно принять 1,4 P_0 (адиабатическое значение).

Формулы для некоторых частных случаев приведены в табл. 6.

Из этих случаев два заслуживают особого рассмотрения. При $\omega = 0$ одна из волн является полностью связанной $(v_2/v_1)' = 1$. Выражение для Γ' и $(W_1' + W_2')$ при этом имеют весьма простой вид. Волна второго типа имеет нулевую скорость $(\Gamma'' = \infty)$. Волновой импеданс, соответственно, бесконечен. Этот тип волны играет важную роль в таких жестких материалах, как акустические штукатурки. Он обычно рассматривается также при изучении более или менее податливых материалов из древесной ваты. Этот тип Γ'' обычно трактуется как жесткий. Весьма вероятно, что часто второй тип волны Γ' является наиболее важным.

Второй экстремальный случай получается при полном отсутствии связи, что оказывается осуществимым только тогда, когда одновременно $\omega = \infty$ (или $\sigma = 0$), $h = 1$ и $k = 1$. Тот факт, что отсутствие связи при этом действительно имеет место, следует

Таблица 6

Значения Γ', Γ'', W_1', W_1'', W_2', W_2'', $(v_2/v_1)'$ и $(v_2/v_1)''$ для некоторых частных случаев (см. также табл. 7)

Внизу даны сокращенные обозначения, используемые только в этой таблице

	$\omega=0$; изотерм.	$\omega=\infty$; $\rho_2 \ll \rho_1$	$\omega=\infty$; $\rho_2 \ll \rho_1$; $h=1$	$\omega=\infty$; $h=k=1$
Γ'^2	$\Sigma\rho/\Sigma K$	ρ_1/K_1	ρ_1/K_1	ρ_1/K_1
Γ''^2	∞	$k\rho_2/hK_2$	$k\rho_2/K_2$	ρ_2/K_2
W_1'	$\sqrt{\Sigma K \cdot \Sigma\rho}\,(1-h+hK_1/\Sigma K)$	$\sqrt{K_1\rho_1}$	$\sqrt{K_1\rho_1}$	$\sqrt{K_1\rho_1}$
W_1''	∞	$\sqrt{K_2k\rho_2h}\,(A\rho_1/\rho_2+BK_1/K_3)$	$(k-1)\sqrt{K_2k\rho_2}\cdot K_1/K_2$	∞
W_2'	$\sqrt{\Sigma K \cdot \Sigma\rho}\,(h-hK_1/\Sigma K)$	$\sqrt{K_1\rho_1}\,\dfrac{k\rho_2K_2'+h\rho_2'K_2}{\rho_1K_2'+\rho_2'K_1}$	$\dfrac{K_2}{K_1}\sqrt{K_1\rho_1}$	∞
W_2''	∞	$\sqrt{K_2k\rho_2h}$	$\sqrt{K_2k\rho_2}$	$\sqrt{K_2\rho_2}$
$W_1'+W_2'$	$\sqrt{\Sigma K \cdot \Sigma\rho}$	—	—	—
$W_1''+W_2''$	∞	—	—	—
$(v_2/v_1)'$	1	$\dfrac{\rho_1K_2'+\rho_2'K_1}{-h\rho_1K_2+k\rho_2K_1}$	$\dfrac{(k-1)\rho_2K_1}{k\rho_2K_1-\rho_1K_2}$	0
$(v_2/v_1)''$	$-K_1/K_2$	$\dfrac{h\rho_1K_2-k\rho_2K_1}{h(k-h)\rho_2K_2}$	$\dfrac{\rho_1K_2-k\rho_2K_1}{(k-1)\rho_2K_2}$	∞
Сокращенные обозначения	$\Sigma\rho=\rho_1+\rho_2$ $\Sigma K=K_1+K_2$	$A=(1-h)/(k-h)$ $B=k-1$ $K_2'=(1-h)(K_2-P_0)$ $\rho_2'=(k-1)\rho_2$		

из значения v_2/v_1 (0 и ∞). При этом Γ и W имеют нормальные значения.

Если $k \neq 1$ (все столбцы табл. 6, кроме последнего), то скелет и воздух остаются связанными системами даже в случае высоких частот, когда трение воздуха не имеет значения.

§ 3. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОРНЕЙ Г-УРАВНЕНИЯ

Корни Г-уравнения (3.10) могут быть легко вычислены, однако зависимость от частоты и материальных констант очень сложна и трудно обозрима. Поэтому оказывается полезным следующее графическое изображение зависимости корней от частоты. Обозначим:

$$u = \Gamma^2$$

$$E = \frac{h\rho_1 + S}{hK_1} + \frac{\rho_2 + S}{hK_2} + \frac{\rho_2(1-h) + S}{hK_1K_2} \cdot \frac{(1-h)(K_2 - P_0)}{h},$$

$$F = \frac{\rho_1\rho_2 + (\rho_1 + \rho_2)S}{hK_1K_2}.$$

Тогда Г-уравнение примет вид

$$u^2 - Eu + F = 0.$$

Его решения u' и u'' будут

$$2u' = E + \sqrt{D},$$

$$2u'' = E - \sqrt{D},$$

где D — дискриминант Г-уравнения, т. е.

$$D = E^2 - 4F.$$

Для упрощения предположим, что K_1 и K_2 — действительные величины, т. е. что внутреннее трение в скелете незначительно и эффект Кирхгофа (см. гл. II, § 3) и другие эффекты, которые могут привести к комплексному значению K_2, отсутствуют. Как мы уже видели раньше, угол потерь для K часто на самом деле мал и поглощение звука обусловливается по большей части вязкостью. По определению ρ_1 и ρ_2 — постоянные. Так как K_1 и K_2 также предполагаются постоянными, то частота теперь будет входить только в S:

$$S = (k-1)\rho_2 + \frac{h^2\sigma}{j\omega}.$$

Предположение о том, что K_1 и K_2 имеют действительные и постоянные значения, конечно, ограничивает общность теории.

Легко видеть, что E имеет вид $a + b/j\omega$; нетрудно также проверить, что D может быть записано в форме

$$D = A - \frac{B}{\omega^2} + \frac{C}{j\omega}, \qquad (3.15)$$

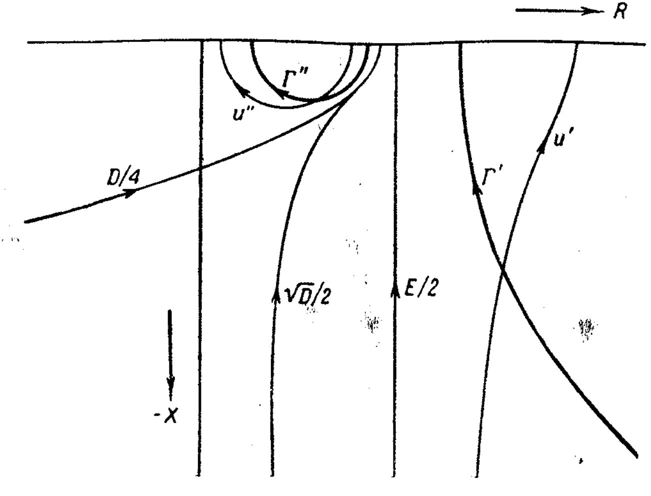
где A и B — положительные постоянные, а постоянная C может быть как отрицательной, так и положительной.

$$A \approx \left(\frac{\rho_1}{K_1} - \frac{k\rho_2}{hK_2}\right)^2 \qquad (\text{при } \rho_2 \ll \rho_1),$$

$$B = \frac{h^2\sigma^2}{K_1^2K_2^2}(K_1 + K_2)^2, \qquad (3.16)$$

$$C \approx \frac{2h\sigma\rho_1}{K_2^2}\left[\left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 - \frac{K_2}{K_1} + \frac{k\rho_2}{h\rho_1}\right] \qquad (\text{при } \rho_2 \ll \rho_1).$$

Характер зависимости D, а следовательно, и u' и u'' от частоты меняется, если C изменяет свой знак. Из (3.16) легко



Фиг. 20. Построение Г' и Г''.

заключить, что это имеет место в том случае, когда приблизительно

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{k\rho_2}{h\rho_1} \quad \text{или} \quad 1 \qquad (\text{при } \rho_2 \ll \rho_1).$$

Если отношение K_2/K_1 имеет величину, лежащую между этими пределами, то C отрицательно; в других случаях оно положительно

На фиг. 20 видно, каким образом могут быть изображены графически Γ' $(=\gamma'/j\omega)$ и Γ'' $(=\gamma''/j\omega)$; $E/2$ изображается посредством прямой линии, параллельной мнимой оси; D является, очевидно, параболой [см. (3.15)]; $D/4$ изображено на фиг. 20 для положительного значения C. Для отрицательного значения C нужно было бы построить другую половину параболы (над вещественной осью).

Прибавляя или вычитая $\sqrt{D}/2$ (квадратный корень из $D/4$) к $E/2$, получим u' или u'', соответственно. Наконец, Γ' и Γ'' находятся посредством извлечения квадратных корней из u' и u''. Масштабы по осям на фиг. 20 могут быть выбраны произвольно. Для простоты мы приняли A за единицу.

Кривая, изображающая Γ', приближается к гиперболе, в то время как кривая Γ'' очень похожа на полуокружность.

Фиг. 20 относится к случаю, когда $K_2/K_1 < k\rho_2/h\rho_1$ (весьма жесткий скелет). Это приводит к положительной величине C и к равенству

$$\sqrt{A} = \frac{\rho_1}{K_1} - \frac{k\rho_2}{hK_2}.$$

В зависимости от величины отношения K_2/K_1 могут существовать три различных типа рисунков, подобных фиг. 30.

Таблица 7

Частотная зависимость Γ' и Γ'' для трех основных случаев

$K_2/K_1 < k\rho_2/h\rho_1$	$k\rho_2/h\rho_1 < K_2/K_1 < 1$	$1 < K_2/K_1$
$\sqrt{A} = k\rho_2/hK_2 - \rho_1/K_1$ C положительно	$\sqrt{A} = \rho_1/K_1 - k\rho_2/hK_2$ C отрицательно	$\sqrt{A} = \rho_1/K_1 - k\rho_2/hK_2$ C положительно

Величина K_2/K_1 определяет знак C. Если C положительно, то «гипербола» лежит вправо от «полуокружности», и наоборот. Условие $K_2/K_1 = k\rho_2/h\rho_1$ соответствует критическому значению как для K_2/K_1, так и для $\sqrt{A}$, т. е.

$$\sqrt{A} = \pm\left(\frac{\rho_1}{K_1} - \frac{k\rho_2}{hK_2}\right) \quad \text{для} \quad \frac{K_2}{K_1} \gtrless \frac{k\rho_2}{h\rho_1}.$$

Следствие из этого можно видеть на конечных участках кривых (взаимная замена $\sqrt{\rho_1/K_1}$ и $\sqrt{k\rho_2/hK_2}$) при переходе от первого ко второму случаю.

Если K_2/K_1 изменяется непрерывно, то и кривая Γ также меняется непрерывно от первого к третьему случаю табл. 7. «Гипербола» и «полуокружность» приближаются друг к другу;

при некоторой величине K_2/K_1 кривые сходятся. Это имеет место при выполнении условия

$$D=0, \text{ т. е. } C=0 \quad \text{и} \quad A-\frac{B}{\omega^2}=0,$$

откуда видно, что Г′ может совпадать с Г″, если при заданном K_2/K_1 частота выбрана соответствующим образом. То же самое совпадение получается и в том случае, когда D становится равным нулю второй раз.

При больших значениях σ (или низких частотах) корни располагаются в начальных точках соответствующих кривых. При этом один из корней равен $\sqrt{(\rho_1+\rho_2)/(K_1+K_2)}$. При низких значениях σ (или высоких частотах) корни находятся в крайних конечных точках кривых.

Какую из двух кривых графика назвать кривой Г′, а какую кривой Г″ — безразлично. Удобной оказывается такая система обозначений, при которой все кривые, оканчивающиеся в точке $\sqrt{\rho_1/K_1}$, обозначаются через Г′, а соответствующие им волны называются волнами скелета. Кривые, оканчивающиеся в точках $\sqrt{k\rho_2/hK_2}$, называются кривыми Г″, они соответствуют воздушным волнам. Такая классификация оправдывается при рассмотрении числовых значений отношения v_2/v_1. Можно предполагать, что отношение v_2/v_1 для воздушных волн больше единицы или, во всяком случае, больше величины этого отношения для скелетных волн. Это предположение действительно оказывается справедливым, что может быть проверено с помощью выражений для v_2/v_1 при $\omega=0$ и $\omega=\infty$ в табл. 6, если предполагается, что K_2/K_1 соответственно очень мало или велико.

Практически важно знать, при каких частотах скелет и воздух колеблются несвязанно и при каких эти колебания связаны. Это можно установить следующим образом. Для скелетной волны имеем $v_1 > v_2$. Можно предположить, что переход от связанных к почти несвязанным колебаниям волны этого типа имеет место при такой частоте, когда инерциальный член $j\omega\rho_1 v_1$ становится равен члену, обусловленному трением $h^2\sigma v_1$ [см. (3.1) и (3.3) для $v_1 \gg v_2$]; отсюда для частоты перехода ω' получаем

$$\omega'=\frac{h^2\sigma}{\rho_1}.$$

Частичного уменьшения связи в воздушной волне по той же причине можно ожидать при большей частоте $\omega''=h^2\sigma/k\rho_2$.

Практическая важность уменьшения связи видна из следующего. При низких частотах (полная связь) только один тип волны не затухает (Г действительно), другой тип сильно затухает и мало возбуждается вследствие высокого волнового импеданса. Как только волна скелета станет свободной, она даст свой

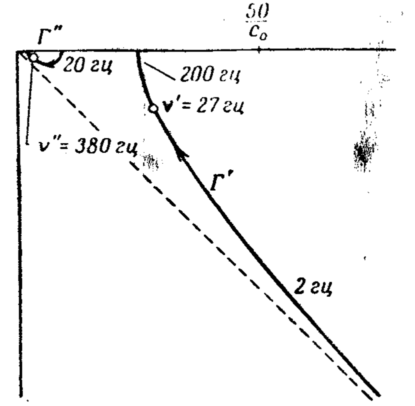
вклад в поглощение. Воздушная волна начинает давать поглощение при более высоких частотах. Нужно помнить, что K_1 и K_2 предполагались действительными; если это не выполняется, то затухание имеет место даже при очень низких частотах вследствие наличия углов потерь в K_1 и K_2.

Таблица 8

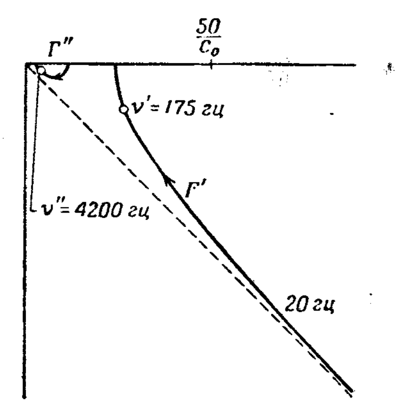
Частота перехода связанных колебаний в несвязанные для ряда материалов

Материал	σ	$\nu' = \omega'/2\pi$	$\nu'' = \omega''/2\pi$
Акустические штукатурки	$5 \cdot 10^3 - 10^5$	1—20 *гц*	100—2000 *гц*
Войлок	$5 \cdot 10^4 - 10^6$	100—3000	1000—20000
Древесная вата . . .	$5 \cdot 10^5 - 10^7$	500—15000	$10^4 - 2 \cdot 10^5$

Табл. 8 дает некоторое представление о значениях частоты ω' в обычных материалах. Величина σ взята для случая стационарного потока. Из таблицы ясно, что изучение связанных колебаний крайне важно для многих материалов.



Фиг. 21. Теоретические кривые для $h=1$, $k=7$, $K_1=0{,}24 \cdot 10^5$ *ньютон/м²*, $K_2=1{,}4 \cdot 10^5$, $\rho_1=120$ *кг/м³*, $\rho_2=1{,}2$, $\sigma=2 \cdot 10^4$ МКС¹).



Фиг. 22. Теоретические кривые для $h=1$, $k=7$, $K_1=0{,}46 \cdot 10^5$ *ньютон/м²*, $K_2=1{,}4 \cdot 10^5$, $\rho_1=200$ *кг/м³*, $\rho_2=1{,}2$, $\sigma=2{,}2 \cdot 10^5$ МКС¹).

На фиг. 21 и 22 показаны два случая, относящиеся к слоям губчатой резины. Такие слои могут считаться довольно податливыми. Однако и другие материалы (например, пластины из мягкой древесной ваты, минеральная вата и т. д.) могут иметь податливость того же порядка.

Выражения для частот, соответствующих выключению связи, выведены из уравнений движения. Однако нужно помнить, что уравнения непрерывности также связаны друг с другом и оста-

¹) Технические единицы метр—килограмм (масса)—секунда. (*Прим. ред.*)

ются связанными при высоких частотах. Смысл ω' и ω'' можно понять из фиг. 21 и 22, где на соответствующих кривых обозначены ν' и ν''. Эти частоты дают некоторое представление о частотных шкалах для каждой кривой. Переходные точки на кривых Γ'', т. е. на кривых, соответствующих воздушным волнам, находятся в слишком близком соседстве с областью свободных колебаний, чтобы их можно было считать принадлежащими к диапазону частот, в котором связанные колебания переходят в несвязанные. Можно показать, что при частотах, примерно в 3 раза меньших ν'', аргумент Γ'', т. е. коэффициент затухания воздушной волны, близок к максимальному, в то время как максимум мнимой части Γ'' достигается при частотах, еще в 3 раза меньших. Хотя для других случаев это и не проверено, но можно считать, что диапазон частот, в котором постепенно происходит выключение связи, распространяется от 0,1 до 1 значений частот ω' и ω'', указанных выше.

§ 4. УПРОЩЕННАЯ ТЕОРИЯ; $h=1$

Если принять, что пористость равна единице, как это было сделано в одной из работ автора, то математическая теория приобретает более симметричный и стройный вид.

Приведем наиболее важные результаты общей теории для этого случая:

$$\Gamma^4-\Gamma^2\left[\frac{\rho_1+S}{K_1}+\frac{\rho_2+S}{K_2}\right]+\frac{\rho_1\rho_2+(\rho_1+\rho_2)S}{K_1K_2}=0,$$

$$W_1=K_1\Gamma,\quad W_2=K_2\Gamma,$$

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{-K_1\Gamma^2+\rho_1+S}{S}=\frac{S}{-K_2\Gamma^2+\rho_2+S}=-\frac{K_1\Gamma^2-\rho_1}{K_2\Gamma^2-\rho_2}.$$

Из последнего выражения для v_2/v_1 можно получить

$$(v_2/v_1)'\,(v_2/v_1)''=-\frac{K_1}{K_2}.$$

Это простое соотношение существует при любых частотах. Для его вывода необходимы выражения для $\Gamma'^2\cdot\Gamma''^2$ и $\Gamma'^2+\Gamma''^2$, которые берутся из уравнений для Γ.

Определим функцию χ согласно равенству

$$\frac{v_2}{v_1}=\chi\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}, \tag{3.17}$$

тогда получим

$$\chi'\chi''=-1. \tag{3.18}$$

Более того, из уравнений непрерывности вытекает

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{K_2}{K_1}\frac{v_2}{v_1}=\chi\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}. \tag{3.19}$$

Это соотношение справедливо для обоих типов волн (при подстановке χ' или χ'' соответственно).

Наконец, с помощью (3.17)—(3.19) легко проверить справедливость следующих соотношений взаимности:

$$\frac{p_2''}{v_1'} = -\frac{p_1''}{v_2'}; \quad \frac{p_2'}{v_1''} = -\frac{p_1'}{v_2''}.$$

Из (3.18) следует, что одна из χ по абсолютной величине меньше единицы, а другая — больше; первая соответствует волне скелета, вторая — воздушной волне.

§ 5. СЛОЙ С ЗАКРЫТОЙ ПЕРЕДНЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассмотрим теперь случай, когда слой ограничен сзади твердой стенкой, а спереди закрыт тонким непроницаемым слоем (например, тонким слоем краски).

Метод решения этой задачи типичен для широкого класса случаев. Предполагается, что в слое присутствуют четыре волны, т. е. падающая и отраженная волны γ' и аналогичные им волны типа γ''. Амплитуда падающей волны γ' задается, так как предполагается известной скорость скелета при $x=0$.

Обозначим ее величину через v_{1i}'. Одновременно с заданием v_{1i}' определяются и все другие величины: v_{2i}', p_{1i}' и p_{2i}' при $x=0$, так как отношения $(v_{2i}/v_{1i})'$ и т. д. для рассматриваемых волн уже известны. Зависимость от x также известна, так как известно γ'. Это же относится и к трем другим типам волн. Поэтому волновая картина будет полностью определена, если при $x=0$ будут известны четыре скорости: v_{1i}', v_{1r}', v_{1i}'' и v_{1r}''. Проблема заключается в том, чтобы из граничных условий вычислить отношения между этими четырьмя амплитудами и тем самым определить импеданс передней поверхности.

Проиллюстрируем процесс вычисления на примере слоя с закрытой передней поверхностью, так как это простейший случай.

Для краткости введем отдельные обозначения для отношений давлений и скоростей. Например,

$p_2/p_1 = \pi$ (не путать с числом 3,14),

$v_2/v_1 = \varphi$ (в отличие от χ, применявшейся в случае $h=1$),

$p_2/v_2 = W_2$,

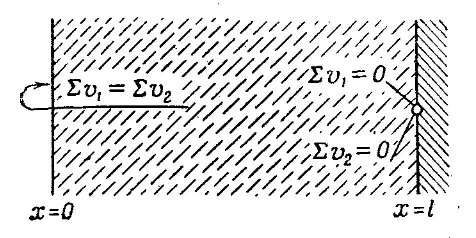
$p_1/v_1 = W_1$.

Эти величины будут встречаться с одним или двумя штрихами в зависимости от того, к какому типу волны они будут относиться.

Граничные условия будут (см. фиг. 23):

$$\sum v_1 = 0 \qquad \text{для} \quad x = l,$$
$$\sum v_2 = 0 \qquad \text{»} \quad x = l,$$
$$\sum v_1 = \sum v_2 \qquad \text{»} \quad x = 0.$$

Эти условия дают три уравнения для четырех амплитуд; из этих уравнений могут быть вычислены все интересующие нас отношения.



Фиг. 23. Граничные условия для слоя с закрытой передней поверхностью.

В полном виде уравнения записываются так:

$$v'_{1i}e^{-\gamma' l} + v'_{1r}e^{\gamma' l} + v''_{1i}e^{-\gamma'' l} + v''_{1r}e^{\gamma'' l} = 0,$$
$$v'_{2i}e^{-\gamma' l} + v'_{2r}e^{\gamma' l} + v''_{2i}e^{-\gamma'' l} + v''_{2r}e^{\gamma'' l} = 0,$$
$$v'_{1i} + v'_{1r} + v''_{1i} + v''_{1r} = v'_{2i} + v'_{2r} + v''_{2i} + v''_{2r}.$$

Заменив в уравнениях $v'_{2i} = \varphi' v'_{1i}$ и т. д., мы получим уравнение лишь относительно четырех скоростей скелета при $x = 0$, которое, как обычно, можно записать в виде матрицы:

$$\begin{array}{cccc} v'_{1i} & v'_{1r} & v''_{1i} & v''_{1r} \end{array}$$
$$\left\| \begin{array}{cccc} e^{-\gamma' l} & e^{\gamma' l} & e^{-\gamma'' l} & e^{\gamma'' l} \\ \varphi' e^{-\gamma' l} & \varphi' e^{\gamma' l} & \varphi'' e^{-\gamma'' l} & \varphi'' e^{\gamma'' l} \\ 1-\varphi' & 1-\varphi' & 1-\varphi'' & 1-\varphi'' \end{array} \right\|,$$

с помощью которой легко проверить, что

$$\frac{v'_{1r}}{v'_{1i}} = -e^{-2\gamma' l}; \qquad \frac{v''_{1r}}{v''_{1i}} = -e^{-2\gamma'' l};$$
$$\frac{v''_{1i}}{v'_{1i}} = -\frac{1-\varphi'}{1-\varphi''} \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma' l}{\operatorname{ch} \gamma'' l} \cdot \frac{e^{\gamma'' l}}{e^{\gamma' l}}. \tag{3.20}$$

Импеданс передней поверхности будет равен

$$z = \left(\frac{\Sigma p_1 + \Sigma p_2}{\Sigma v_1}\right)_{x=0} = \frac{p'_{1i} + p'_{2i} + p'_{1r} + p'_{2r} + p''_{1i} + p''_{2i} + p''_{1r} + p''_{2r}}{v'_{1i} + v'_{1r} + v''_{1i} + v''_{1r}}.$$

В знаменателе скорости с двойными штрихами могут быть исключены с помощью третьего граничного условия (см. последнюю строку матрицы); числитель же может быть выражен через v'_{1i}, v'_{1r}, v''_{1i}, v''_{1r}, если вначале заменить p_2 на πp_1 и затем все давления выразить через скорости, учтя, что $p = \pm Wv$.

После подстановки (3.20) получим окончательно

$$z = W'_1 (1 + \pi') \frac{1 - \varphi''}{\varphi' - \varphi''} \operatorname{cth} \gamma' l + W''_1 \ (1 + \pi'') \frac{1 - \varphi'}{\varphi'' - \varphi'} \operatorname{cth} \gamma'' l. \quad (3.21)$$

Это выражение можно рассматривать как последовательное соединение двух импедансов. Однако эти импедансы в общем случае нельзя рассматривать как импедансы скелета и воздуха по отдельности. Лишь в случае очень слабой связи ($\omega = \infty$, $k = 1$) и $h = 1$ (3.21) может быть значительно упрощено вследствие того (см. табл. 6), что:

$$W'_1 = \sqrt{K_1 \rho_1}, \qquad \varphi'' = \infty,$$

$$\pi = \frac{K_2}{K_1} \varphi \ [\text{из (3.4) и (3.5) для } h = 1], \qquad W''_1 = \frac{W''_2 \varphi''}{\pi''},$$

$$\varphi' = 0, \qquad W''_2 = \sqrt{K_2 \rho_2}.$$

Следовательно,

$$z = \sqrt{K_1 \rho_1} \operatorname{cth} j\omega l \sqrt{\frac{\rho_1}{K_1}} + \sqrt{K_2 \rho_2} \operatorname{cth} j\omega l \sqrt{\frac{\rho_2}{K_2}}. \quad (3.22)$$

В этом случае можно говорить об импедансе скелета и импедансе воздуха по отдельности.

В другом крайнем случае весьма тесной связи второй cth в (3.21) исчезает, причем мы получаем

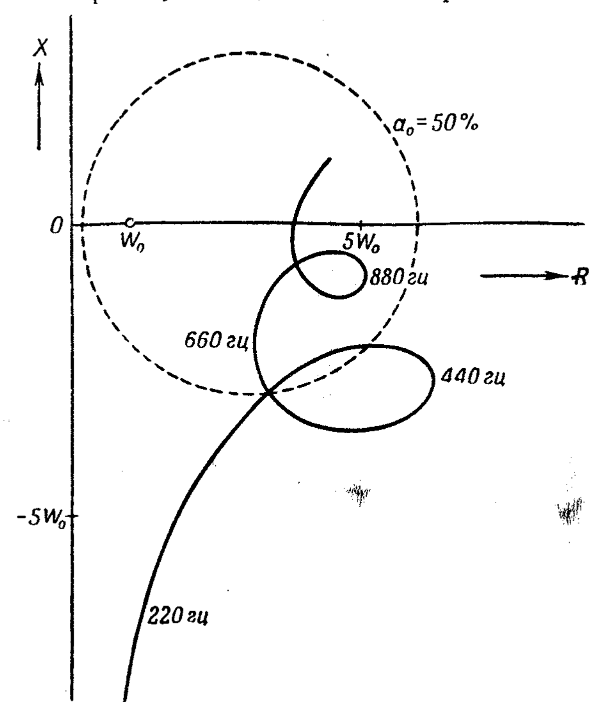
$$z = \sqrt{(K_1 + K_2)(\rho_1 + \rho_2)} \operatorname{cth} j\omega l \sqrt{\frac{\rho_1 + \rho_2}{K_1 + K_2}}, \quad (3.23)$$

чего и нужно было ожидать.

Рассмотрим теперь результаты при учете коэффициента поглощения в слое. Для начала проанализируем подробнее случай, когда связью можно пренебречь и, следовательно, можно говорить по отдельности об импедансе скелета и импедансе воздуха. Оба члена в комплексной плоскости графически изображаются в виде спиралей, причем спираль, соответствующая второму члену (импеданс воздуха), в основном обсуждалась в гл. I и II. Резонансные иантирезонансные частоты для нее лежат в области слышимых частот; нижайшая резонансная частота будет лежать в промежутке с примерными границами 800—2000 *гц*.

При сложении импедансов воздуха и скелета (наложение двух спиралей в комплексной плоскости) вид контура для полного импеданса существенно зависит от величины отношения наимень-

ших резонансных частот скелета и воздуха. Если резонансные частоты скелета много ниже соответствующих резонансных частот воздуха ($\rho_1 \gg \rho_2$; $K_1 \approx K_2$; легкие материалы, подобные губчатой резине, минеральная вата, пластины из рыхлой древесной ваты с низким воздушным сопротивлением), то результирующая кривая имеет характер, изображенный на фиг. 24.



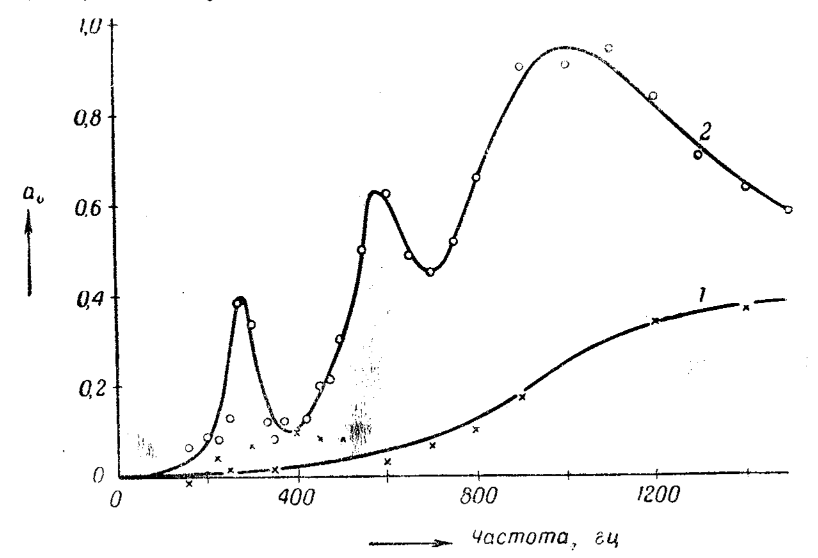
Фиг. 24. Теоретический импедансный контур для слоя с закрытой передней поверхностью.

При этом сохраняется общее стремление вверх, характерное для импеданса воздуха. Резонансы же скелета вызывают отклонение от этого хода. Однако наиболее существенным является смещение «воздушной кривой» вправо на расстояние порядка волнового импеданса скелета ($\sqrt{K_1\rho_1}$).

Импеданс воздуха для материалов с низким сопротивлением воздуха σ при низких и средних частотах обычно имеет действительную часть порядка W_0. При низких частотах увеличение этой действительной части значительно повышает поглощение, что весьма существенно.

В обратном случае, при сравнительно жестком скелете ($\rho_1 \gg \rho_2$; $K_1 \gg K_2$, так что $K_1/\rho \gg K_2/\rho_2$; акустические штукатурки,

плотные пластины из древесной ваты), характер фиг. 24 существенно изменяется. Стремление кривой вверх теперь будет обусловлено скелетом, в то время как отклонения будут вызываться воздухом; эти отклонения типа флюктуаций теперь появляются при более высоких частотах (2500—5000 *гц* вместо 440—800 *гц*), а перемещение кривой вправо ($\sqrt{K_1\rho_1}$) так велико, что контур переходит в часть комплексной плоскости, соответствующую малому поглощению.



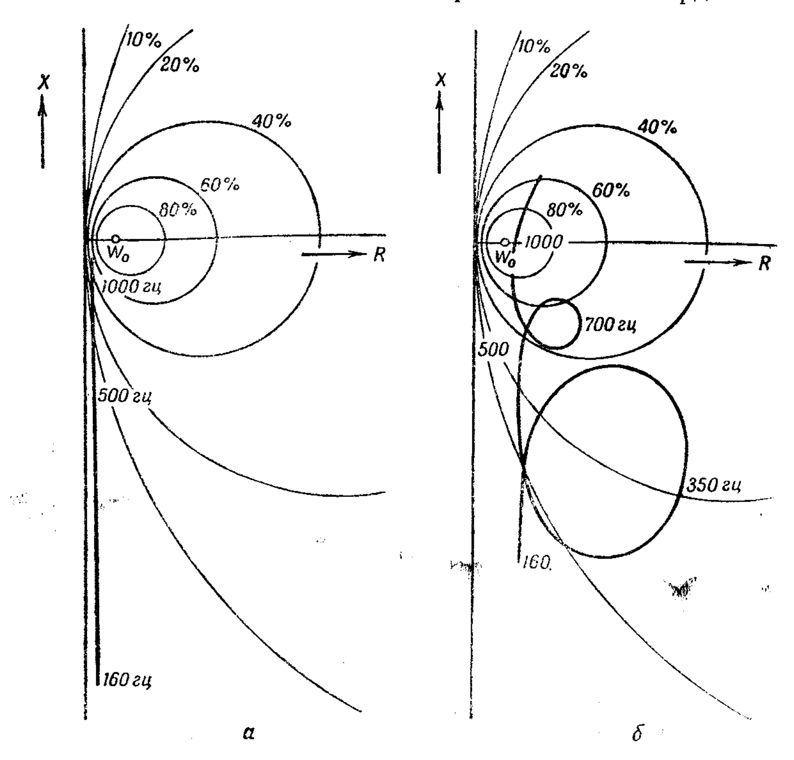
Фиг. 25. Улучшение поглощения при покрывании поверхности податливого слоя.
1—открытая поверхность; *2*—закрытая поверхность.

Последний случай хорошо известен; известно, что штукатурки и плотные пластины из древесной ваты не поглощают, если их покрыть сверху. Таким образом, первый случай (довольно мягкий материал с покрытой поверхностью) более интересен. Здесь могут быть получены гораздо лучшие результаты, чем в случае того же самого слоя с непокрытой поверхностью, особенно при низких частотах. На фиг. 25 приведены результаты измерений для слоя пористой резины с низким воздушным сопротивлением. Импедансные кривые (фиг. 26, жирные линии) действительно имеют ожидаемую форму.

Промежуточный случай, когда резонансные частоты скелета и воздуха одного порядка, очень сложен.

Более полные экспериментальные результаты и сравнение их с теорией можно найти в оригинальной работе [1].

Если в материале связь между скелетом и воздухом мала, то можно увеличить действующее количество воздуха без изменения скелета, поместив слой на некотором расстоянии от твердой стенки.

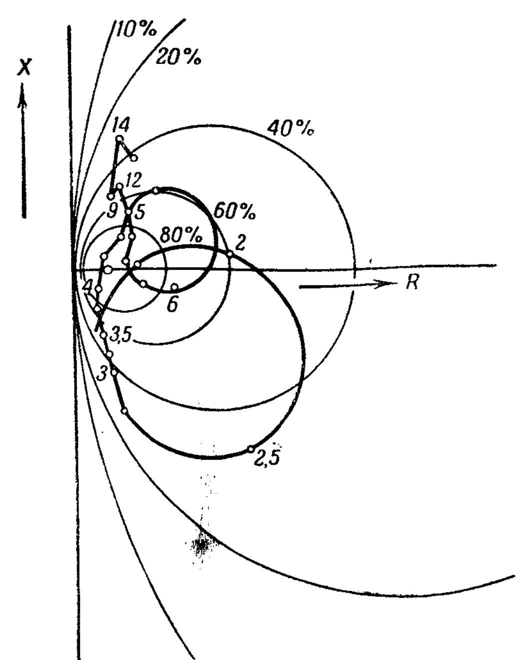


Фиг. 26. Импедансный контур для случая, изображенного на фиг. 25.

На фиг. 27 показаны результаты измерений для такого случая, причем слой тот же, что и на фиг. 25. Как мы видим, удалось достигнуть понижения резонансных частот воздуха и получить таким образом более компактную импедансную кривую в той части комплексной плоскости, которая соответствует высокому поглощению.

До сих пор предполагалось, что покрывающий слой не имеет массы; однако она может быть легко учтена, если обозначить массу этого слоя на единицу поверхности через m и к значению импеданса добавить $j\omega m$. В результате импедансная кривая еще больше поднимется вверх. При высоких частотах член $j\omega m$ может быть существенным, обусловливая появление верхней, хотя и весьма нерезко выраженной границы частот, при которых

эффективен поглотитель. Для низких частот член $j\omega m$ действует в сторону повышения поглощения. Другое несомненное преимущество поверхностных слоев заключается в том, что их можно мыть и окрашивать.



Фиг. 27. Импедансный контур покрытого слоя со слоем воздуха позади толщиной 78 *мм*. Указаны частоты в сотнях герц.

§ 6. СЛОЙ С ОТКРЫТОЙ ПЕРЕДНЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Практически этот случай, повидимому, более важен. Однако его теория более сложна.

В качестве граничных условий теперь имеем

$$\sum v_1 = 0 \qquad \text{для} \quad x = l,$$

$$\sum v_2 = 0 \qquad \text{»} \quad x = l,$$

$$\frac{\Sigma p_1}{1-h} = \frac{\Sigma p_2}{h} \qquad \text{»} \quad x = 0.$$

Последнее условие вытекает из того, что и скелет и воздух при $x = 0$ находятся под одним и тем же внешним *давлением* воздуха, причем площади скелета и воздуха на единицу поверхности материала равны $1-h$ и h, соответственно, а *силы* равны p_1 и p_2 по определению.

Если снова предположить, что имеются четыре волны, для которых заданы v'_{1i}, v'_{1r}, v''_{1i} и v''_{1r} (скорости при $x=0$, т. е. на передней поверхности слоя), то третье граничное условие может быть записано в этих переменных так же, как это было сделано в предыдущем параграфе. Все давления p_2 выражаются через p_1, согласно равенству $p_2=\pi p_1$; давления p_1 в свою очередь выражаются через соответствующие скорости, согласно соотношению $p=\pm Wv$. В результате получаем

$$W'_1[h-(1-h)\pi'](v'_{1i}-v'_{1r})+W''_1[h-(1-h)\pi''](v''_{1i}-v''_{1r})=0.$$

Из этого уравнения и первых двух граничных условий, совпадающих с условиями предыдущей главы, могут быть вычислены все отношения между v'_{1i}, v'_{1r}, v''_{1i} и v''_{1r}.

После подстановки их в выражение для импеданса

$$z=\left(\frac{\sum p_1+\sum p_2}{\sum(1-h)\,v_1+\sum hv_2}\right)_{x=0}$$

находим путем элементарных, но трудоемких выкладок

$$\frac{1}{z}=\frac{(1-h+h\varphi')\,[h-(1-h)\,\pi'']}{W'_1(\pi'-\pi'')}\,\operatorname{th}\gamma' l+$$
$$+\frac{(1-h+h\varphi'')\,[h-(1-h)\,\pi']}{W''_1(\pi''-\pi')}\,\operatorname{th}\gamma'' l. \tag{3.24}$$

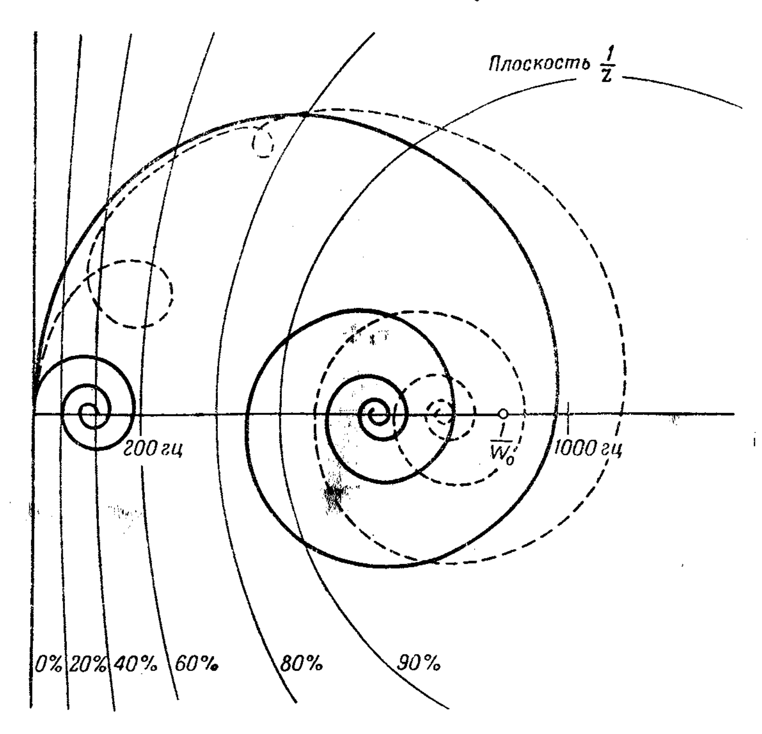
Для материалов, где с хорошим приближением можно положить $h=1$, уравнение (3.24) дает

$$\frac{1}{z}=\frac{\varphi'}{W'_1(\pi'-\pi'')}\,\operatorname{th}\gamma' l+\frac{\varphi''}{W''_1(\pi''-\pi')}\,\operatorname{th}\gamma'' l. \tag{3.25}$$

Здесь импеданс можно трактовать как результат параллельного соединения двух импедансов. В случае слабой связи импеданс можно рассматривать как воздушный импеданс, в некоторой мере шунтированный импедансом скелета. Это шунтирование наиболее эффективно при малых импедансах скелета, т. е. когда скелет находится вблизи резонанса.

В случае параллельного соединения импедансов, как в (3.24), теоретические результаты графически удобно представить в виде диаграммы адмитанса. Из уравнения (1.12), дающего коэффициент отражения в функции импеданса, видно, что коэффициент отражения не меняется, если вместо импеданса, выраженного в единицах W_0, подставляется адмитанс. Это значит, что линиями постоянного поглощения в комплексной плоскости адмитанса являются те же самые окружности, которые фигурировали и в импедансной плоскости.

На фиг. 28 приведен простейший пример. При этом сделаны следующие допущения: слабая связь $\rho_1 \gg \rho_2$, $K_1 \approx K_2$. Второй член (адмитанс воздуха) является обычной спиралью с первым резонансом около 1000 *гц*. Функция th в комплексной плоскости изображается посредством спирали, начинающейся в начале координат, а не на бесконечности, как в случае cth. Нужно заметить,



Фиг. 28. Адмитансный контур слоя с открытой передней поверхностью.

что при возрастании волнового импеданса вершина спирали перемещается по направлению к началу. Поэтому в нашем случае скелетная спираль меньше и сворачивается быстрее благодаря низким резонансным частотам. Суперпозиция двух спиралей (пунктирная линия на фиг. 28) представляет собой более или менее видоизмененную воздушную спираль. Это видоизменение может иметь некоторое значение лишь при низких частотах.

Если связь не мала, то термины «воздушная спираль» и «скелетная спираль» теряют свой смысл. В предельном случае очень сильной связи имеется лишь одна спираль, соответствующая волне в тесно связанной системе (3.23).

§ 7. УПРУГИЙ СЛОЙ, ЛЕЖАЩИЙ НА ПОДКЛАДКЕ, ОТЛИЧАЮЩЕЙСЯ ОТ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

Если слой лежит не на твердой стенке, а на мембране с импедансом z_b, то граничные условия $\sum v_1 = 0$ и $\sum v_2 = 0$ (для твердой стенки) должны быть заменены следующими:

$$\left(\frac{\sum p_1 + \sum p_2}{\sum (1-h) v_1 + \sum h v_2}\right)_{x=l} = z_b; \quad v_1 = v_2 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Условие $v_1 = v_2$ справедливо, если материал с импедансом z_b, на котором лежит слой, не является двояко преломляющим. Если этот материал пористый, с твердым скелетом, то нужно заменить граничные условия на

$$v_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \quad \frac{p_2/h}{h v_2} = z_b \quad \text{при} \quad x = l,$$

где z_b — импеданс применяемого материала, получаемый, например, при измерениях с интерферометром.

Глава IV

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ПОРИСТЫЕ МАТЕРИАЛЫ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих главах были введены следующие постоянные, характеризующие материал: пористость h, структурный фактор k, воздушное сопротивление σ, «модуль сжатия» скелета K_1 (для упругих слоев). Как мы видели (гл. I, § 8), нельзя ожидать, что структурный фактор можно найти из статических измерений или измерений в постоянном потоке. Он имеет очень сложную связь со структурой материала. Наоборот, пористость может быть легко определена из измерений в постоянном потоке или из низкочастотных измерений. Хотя в этом случае и получается несколько завышенная величина (см. гл. II, § 9), но приближенная оценка величины при этом может быть сделана. Метод измерения изложен в § 2 настоящей главы.

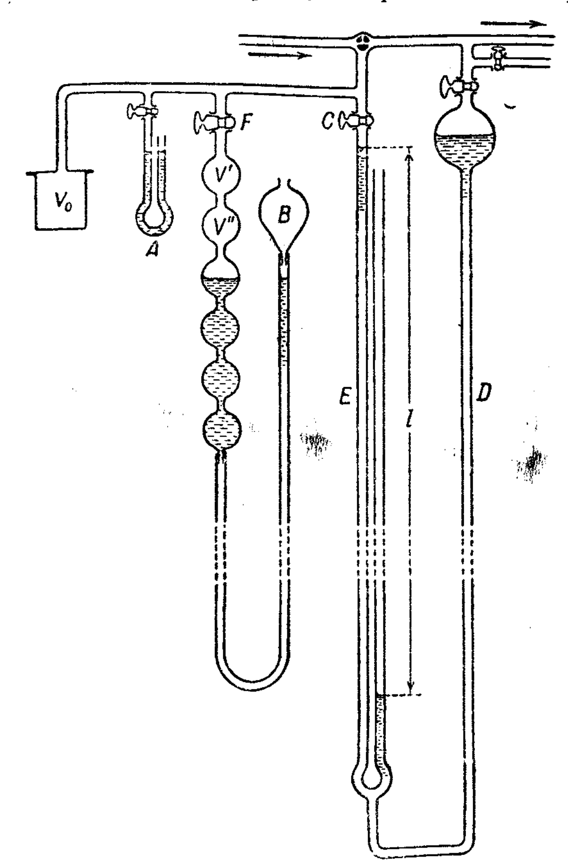
Значение воздушного сопротивления σ для звуковой волны может быть найдено из соответствующей величины для постоянного потока, если известно, что нужно применять для описания явления закон Пуазейля или теорию Гельмгольца. Таким образом, значение σ для стационарного потока является несомненно важной величиной (см. § 3).

Измерения K_1 труднее, чем это может показаться с первого взгляда. Комплексное значение K_1 можно получить лишь в измерениях со звуком. Может показаться, что статические измерения упругости материала должны дать модуль величины K_1. Однако хорошо известно, что динамический модуль может быть в несколько раз больше статического. При низких частотах (5—50 *гц*) K_1 обычно так мало меняется с частотой, что экстраполяция к акустическим частотам кажется вполне законной. Однако нужно учесть одно существенное ограничение. Строго говоря, нужно измерять жесткость одного скелета без воздуха. Поэтому если σ велико (сильная связь), то и измерения должны проводиться в вакууме; если же σ мало, то достаточно обеспечить свободное проникновение окружающего воздуха. Эта трудность до некоторой степени может быть устранена путем вычисления K_1 из опытных значений модуля сдвига G. Собственно говоря, это можно сделать лишь для изотропных материалов; для анизотропных же материалов (например, для панелей из древесных волокон) этот метод приведет нас лишь к ориентировочному значению ком-

плексной величины K_1 (см. § 4). Представление о степени анизотропии может быть получено путем измерения образцов различных ориентаций.

§ 2. ПОРИСТОСТЬ

Используя закон Бойля—Мариотта $pV = \text{const}$, пористость можно определить с помощью аппарата, изображенного на фиг. 29 [15].

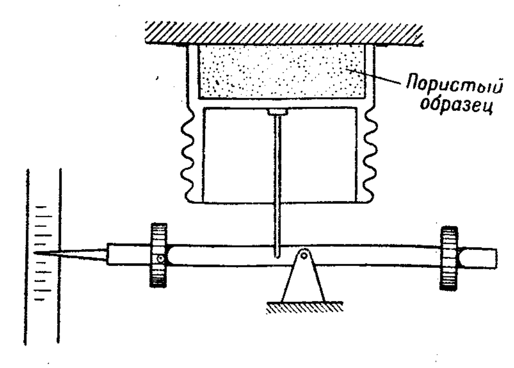


Фиг. 29. Прибор для измерения пористости.

Образец известного объема помещается в сосуд объема V_0. Увеличение объема достигается посредством открывания крана F и понижения сосуда B, так как при этом к V_0 добавляется объем шаров V', V'' и т. д. Получающееся при этом изменение давления измеряется манометром E. Уровень в C сохраняется

неизменным при помощи кранов, находящихся в верхней части трубки D.

Как набор шаров V', V'' ..., так и детали манометра $E-D$ должны быть помещены в водяной термостат. В качестве жидкости для манометра был выбран *орто*-диизоамилфталат вследствие его незначительной летучести, низкой плотности и вязкости. Приведем некоторые результаты измерений.



Фиг. 30. Прибор Леонарда для измерения пористости.

Пористые штукатурки имеют пористость h в пределах 0,50 — 0,75.

Для панелей из древесных волокон были найдены значения h, близкие к 0,80.

Войлок, пористая резина и пробковые образцы имеют высокую пористость в пределах 0,85 — 0,95.

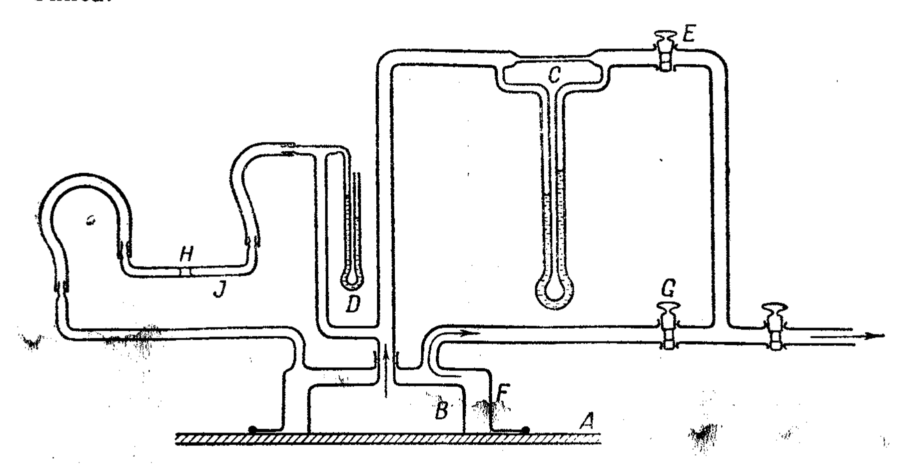
Недавно Леонардом [16] был описан прибор, допускающий измерение пористости при низких частотах. При очень низких частотах волновой характер звука внутри поглощающего материала может не учитываться. Воздух внутри материала в целом ведет себя как пружина, податливость которой на 1 $м^2$ пропорциональна общему содержанию воздуха, заключенного в 1 $м^2$ материала, т. е. пропорциональна толщине слоя и пористости. Основные детали прибора, описанного в указанной работе [16], видны на фиг. 30. Основой является резонансная система, упругость которой в основном обусловливается воздухом, содержащимся в пористом материале. Пористость при этом определяется из резонансной частоты. Леонард считает преимуществом своего метода то, что он не чувствителен к изменению температуры. Важно также и то, что объем трудно доступных пор не входит в определяемую пористость. При этом (см. гл. II, § 9) эффективная пористость будет уменьшаться с увеличением частоты.

§ 3. ВОЗДУШНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Схема прибора для определения сопротивления σ в стационарном воздушном потоке изображена на фиг. 31. К испытуемому образцу A прикрепляется коробка B, в которой с помощью воздушного насоса поддерживается давление несколько меньше атмосферного. Давление измеряется с помощью микроманометра D.

Скорость воздушного потока измеряется посредством капиллярного измерителя *C*. Для предотвращения радиальных потоков в образце коробка *B* помещается в более широкий ящик *F*, в котором давление сохраняется в точности таким же, как и в *B* (принцип защитного кольца).

Равенство давлений контролируется при помощи капли *орто*-диизоамилфталата, которая остается в покое внутри капилляра *J*. Коробка *F* прикрепляется по краям к образцу *A* с помощью гипса.

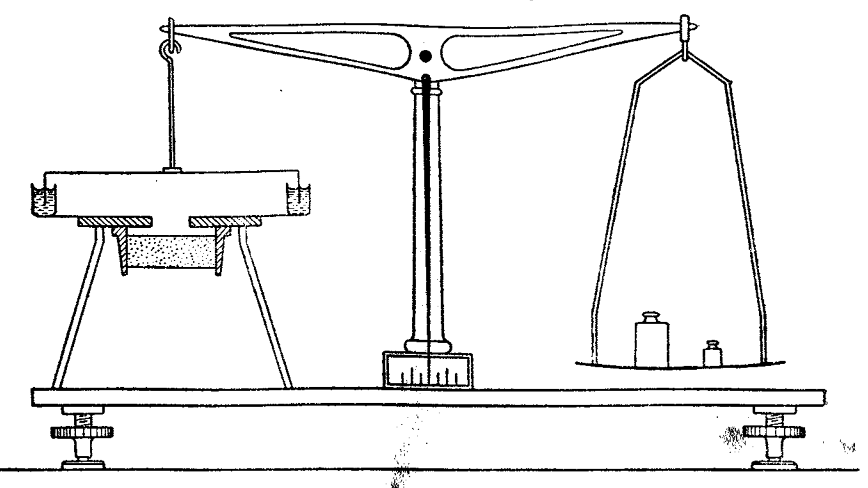


Фиг. 31. Прибор для определения воздушного сопротивления.

Практические значения воздушного сопротивления заключаются между 10^4 и 10^7 МКС. Для того чтобы охватить такой широкий диапазон значений, необходимо применять набор различных капилляров или изменять воздушное сопротивление капилляров посредством введения в них одной или нескольких хромированных проволок, что приводит к тому же результату, но гораздо легче осуществляется.

Подобный аппарат был сконструирован в лаборатории авторов. Градуировочные кривые измерителя скорости строились путем откладывания по оси абсцисс разницы давлений или ее квадрата, а по оси ординат—объемной скорости. В обоих случаях графики не являлись прямыми линиями. Применялись разности давлений порядка 0,02—2 *мм* водяного столба, что обусловливало воздушные потоки порядка 3 — 180 *см*³/*сек*. Внутренняя поверхность образцов была 400 *см*². Следовательно, могло быть измерено воздушное сопротивление порядка $10^3 - 3 \cdot 10^7$. Относительная ошибка была порядка 15% (практические значения σ см. в гл. II, § 5).

Применяются также измерения и без защитного кольца. При этом употребляются такие же цилиндрические образцы, как и при измерениях с акустическим интерферометром. Боковая поверхность образца покрывается твердым парафином, для того чтобы обеспечить параллельный поток воздуха через образец.



Фиг. 32. Прибор для определения воздушного сопротивления.

Для измерения воздушного сопротивления Леонардом [17] был предложен прибор, в котором совмещены аналитические весы с воздушным насосом, манометром и измерителем скорости (фиг. 32); нижняя граница измеряемых этим прибором сопротивлений составляет 1000 МКС, а нижняя граница применяемых разностей давлений — порядка 0,1 *мм* водяного столба. Точность метода приблизительно 2%.

Однородность материала может быть проверена посредством применения образцов одного и того же материала, но различной толщины. Как правило, вблизи поверхности слоя материал более проницаем, чем внутри.

При сильном поглощении величина $\sigma l/3$ должна быть порядка $\rho_0 c_0$ (420 МКС) (см. гл. II, § 7). Это дает удельное воздушное сопротивление порядка $5 \cdot 10^4$ МКС; такие значения были получены для штукатурок с высоким сопротивлением и для войлока с низким сопротивлением.

§ 4. МОДУЛЬ СЖАТИЯ

Как отмечалось в § 1, K_1 не может быть получен из статических опытов. Если измерения производятся при низких частотах, то результат должен быть экстраполирован к слышимым

частотам. Кроме того, должно быть учтено влияние содержащегося в материале воздуха. Воздух может увеличивать как упругость, так и потери.

Чтобы избежать измерений в вакууме, обратимся к измерениям с помощью сдвиговых колебаний. Так как сдвиги не вызывают изменения объема, то сдвиговая упругость образца не зависит от содержания воздуха. Кроме того, поскольку перемещения воздуха внутри могут считаться малыми, то воздух будет лишь незначительно увеличивать потери. Таким образом, модуль сдвига G будет практически совпадать с его величиной в вакууме.

Согласно определению, K_1 является упругостью единицы объема материала при отсутствии боковых смещений. Следовательно, K_1 не совпадает ни с объемным модулем, ни с модулем Юнга E. Если рассматриваемый материал изотропен, то нетрудно получить

$$2G(m-1) = K_1(m-2)$$

где m — коэффициент Пуассона $(m > 2)$ [1].

Для всех встречающихся на практике пористых материалов m весьма велико (10 или более), так что можно положить m равным бесконечности, и в результате

$$K_1 \approx 2G.$$

Измерения могут проводиться любым аппаратом для измерения механических импедансов. Соответствующие приборы были описаны Мейером и Кейделем [18], Костадони [19], Бёмом [20] и авторами данной книги [21].

В принципе при соблюдении некоторых предосторожностей для этой цели может быть применен акустический интерферометр.

Если измерения проводятся в области слышимых частот с образцами, резонансные частоты которых лежат в этой же области, то для импеданса получается спиралевидная кривая (см. гл. I). Блестящие результаты такого типа получены Бёмом [20] с рядом материалов (например, с резиной). Авторами проводились измерения при низких частотах, когда инерциальные эффекты не играли роли. Результаты для обычных частот могут быть получены путем экстраполяции.

§ 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ КОМПЛЕКСНОЙ УПРУГОСТИ

Опытные данные о модуле K_1 и угле потерь δ пористых материалов, полученные путем измерений в вакууме или выведенные из измерений модуля сдвига, отсутствуют.

---

[1] В литературе коэффициентом Пуассона принято называть величину, обратную m. (*Прим. ред.*)

Обычно измеряется статическая величина K_1. Ее значение может изменяться от весьма низких значений, составляющих для мягких волокнистых материалов $^1/_{100}$ упругости воздуха, а для мягкой пористой резины—около $^1/_{10}$ упругости воздуха, до практически бесконечно большого значения для штукатурок.

Наилучшее значение комплексной величины K_1 для колебательного режима получается, повидимому, путем умножения ее статического значения на отношение $K_{1\,\text{дин.}}/K_{1\,\text{стат.}}$, полученное для непористых материалов того же рода. При этом для угла потерь берется та же величина, что и для сплошного (непористого) материала. Вследствие этого имеет смысл проанализировать величины отношений $K_{1\,\text{дин.}}/K_{1\,\text{стат.}}$ и углов потерь δ для некоторых сплошных материалов.

Типичным примером мягких непористых материалов, для которых имеются данные [22], является резина. Если она соответствующим образом вулканизирована и относительно чиста, т. е. не содержит излишних наполнителей, то динамическая и статическая податливости практически совпадают, а угол потерь — порядка 1°. Если материал недовулканизирован, динамическая податливость превышает статическую в 2 или даже более раза. Угол потерь при этом возрастает до 5—10°. Однако материал оказывается не идеально упругим; после устранения статической нагрузки первоначальный уровень не восстанавливается (остаточная деформация). Те же самые эффекты, которые имеют место при недовулканизации, обнаруживаются также при применении таких наполнителей, как сульфат бария, черный уголь и т. д. Свойства синтетической резины близки к свойствам недовулканизированной натуральной резины, т. е. динамическая упругость больше статической, углы потерь порядка 5—10°; впрочем, эти свойства сильно зависят от состава и обработки образца. Поведение резины этого рода и резиноподобных материалов в основном характеризуется наличием остаточной деформации.

В план этой книги не входит теоретическое рассмотрение колебаний и внутреннего трения в металлах, дереве и др. Так как характеристические частоты для таких материалов, вычисленные из статических констант, согласуются с опытными частотами, то, следовательно, статическая и динамическая упругости этих материалов практически равны. Угол потерь по большей части мал, порядка 0—1°.

Сомнительно, чтобы такие пористые материалы, как панели из древесного волокна, волосяной войлок, стеклоткань и т. д., вели себя так же. Измерения, проводившиеся в воздухе [23—25], дали величину динамической упругости, в 10 раз большую статической, а в некоторых случаях даже и еще выше. Трение между волокнами существенно повышает потери; угол потерь δ меняется в пределах 2—20°. Значение δ, превышающее 10°, несомненно

обусловлено потоками воздуха в образец и из образца. В случае, когда потери существенно обусловлены воздушными потоками, как K_1, так и δ существенно зависят от частоты [26]. Низкочастотные значения K_1 и δ близки к их значениям в вакууме. Нужно подчеркнуть, что в то время как для нормального падения звука на бесконечный слой поглощающего материала сцепление имеет наибольшую величину при низких частотах, в случае малых образцов справедливо обратное вследствие боковых потоков воздуха. Образец при этом ведет себя как объем, наполненный воздухом с утечкой, для установления в котором внешнего давления требуется некоторое конечное время.

Глава V

ИЗМЕРЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО ИМПЕДАНСА И КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Импеданс различных материалов (по которому с помощью фиг. 11 можно найти и коэффициент поглощения) обычно измеряется с помощью трубы, в которой создается плоская волна. На одном конце трубы помещают излучатель, на другом — исследуемый материал. При этом существуют различные способы определения импеданса. Например, звуковое давление можно замерять как функцию расстояния до исследуемого образца, частоты или же длины трубы. Если пренебречь затуханием волн вследствие эффекта Гельмгольца — Кирхгофа, то для расчета импеданса необходимо иметь три величины (например, два значения давления и длину). Сравнительно полный обзор различных способов определения импеданса имеется у Беранека [27]. Невозможно, да и бессмысленно перечислять здесь все эти способы. Ограничимся описанием лишь следующих:

а) метод трубы постоянной длины; фиксируются максимум и минимум звукового давления в трубе (см. § 2);

б) метод трубы переменной длины; замеряются максимум и минимум звукового давления около излучателя (см. § 3);

в) метод трубы переменной длины; измеряется ширина кривой давления около излучателя (см. § 4);

г) метод трубы переменной длины; измеряется электрический импеданс источника звука (см. § 5 и 6);

д) метод короткой трубы; измеряются давление и скорость (см. § 7).

§ 2. ИНТЕРФЕРОМЕТР ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЫ

Если длина звуковой волны больше чем в 1,707 раза превышает диаметр D трубы, то в трубе может распространяться лишь плоская волна [4]. Волна может быть не плоской лишь вблизи излучателя или в отраженной волне вблизи исследуемого образца, если он неоднородный. Однако если длина волны достаточно велика, то на некотором расстоянии от образца отраженная волна становится опять плоской [4]. Отсюда следует, что все интерферометры могут быть использованы только при частотах, меньших $c_0/1,7\ D$. Это условие должно выполняться, если даже

излучаемые волны идеально плоские, так как все исследуемые образцы всегда более или менее неоднородны и поэтому при слишком высокой частоте отраженные волны не будут плоскими. Предполагая, что вышеуказанное условие выполняется, звуковое поле в трубе можно представить в виде суперпозиции двух плоских волн, падающей и отраженной. Вследствие поглощения отраженная волна будет иметь меньшую амплитуду. Мы можем воспользоваться уравнением (1.12), связывающим коэффициент отражения $r = p_r/p_i$ с импедансом материала z:

$$r = \frac{z - W_0}{z + W_0} \quad \text{или} \quad \frac{z}{W_0} = \frac{1+r}{1-r}. \tag{5.1}$$

Так как постоянная распространения γ для воздуха равна $j\omega/c_0$, то выражение для давления на расстоянии x от образца при пренебрежении затуханием запишется

$$p(x) = p_i e^{-j\frac{\omega x}{c_0}} + r p_i e^{j\frac{\omega x}{c_0}}. \tag{5.2}$$

Запишем, как и прежде, коэффициент отражения в виде

$$r = |r| e^{j\Delta};$$

подставляя это выражение в (5.2), получим

$$p(x) = p_i e^{-j\frac{\omega x}{c_0}} + |r| p_i e^{j\left(\frac{\omega x}{c_0} + \Delta\right)}. \tag{5.3}$$

Минимум звукового давления будет при таких значениях $x = x_n$, когда оба члена будут иметь противоположные фазы, т. е.

$$\left(\frac{\omega x_n}{c_0} + \Delta\right) - \left(-\frac{\omega x_n}{c_0}\right) = -(2n+1)\pi,$$

где n — целое число. Отсюда находим

$$\Delta = -(2n+1)\pi - \frac{4\pi n}{\lambda}. \tag{5.4}$$

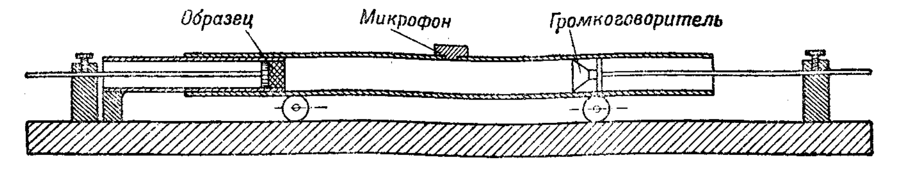
Таким образом, по расположению в трубе узлов звукового давления можно определить величину Δ. Полезно лишь заметить, что вычисление λ по частоте и скорости звука недостаточно точно. Более надежные значения Δ получаются путем определения местоположения двух минимумов (например, x_0 и x_1) и исключения λ из соответствующих уравнений.

Из (5.3) видно, что отношение максимума звукового давления к минимуму равно

$$\frac{p_{\text{макс.}}}{p_{\text{мин.}}} = \frac{1+|r|}{1-|r|}. \tag{5.5}$$

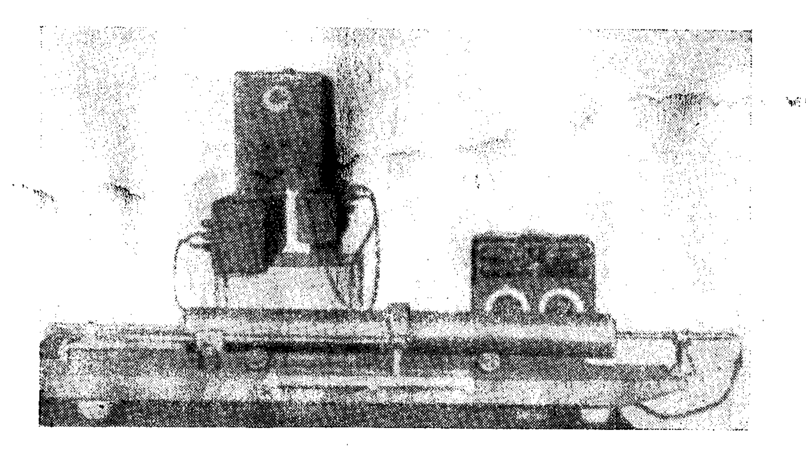
Отсюда, измерив $p_{\text{макс.}}/p_{\text{мин.}}$, найдем $|r|$. Таким образом, из (5.4) и (5.5) можно определить как модуль, так и фазу (аргумент) коэффициента отражения.

Для определения этих величин имеются различные приборы, отличающиеся друг от друга только способом измерения давления. Тума [28] оценивал звуковое давление на слух и получил



Фиг. 33. Интерферометр постоянной длины.

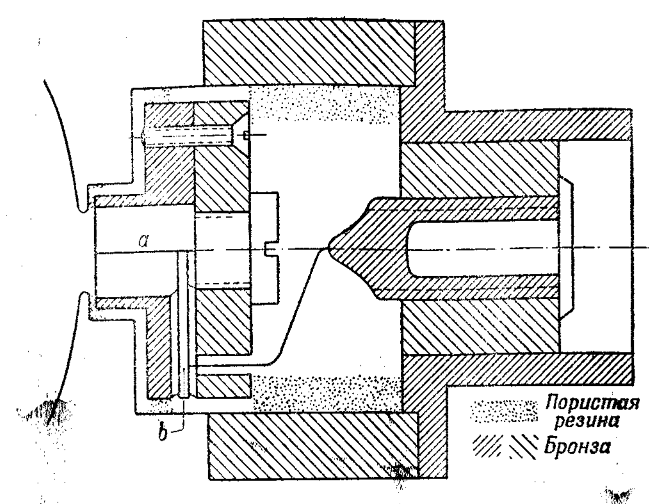
лишь ориентировочные данные. Тэйлор [29] использовал диск Рэлея, помещенный в конце трубы. Пэрис [30] пользовался проволочным анемометром. Этим же методом пользовались Гольдбаум и Вэцман [31], а некоторые авторы [32] использовали зонд в виде трубки очень малого диаметра по сравнению с трубой интерферометра,



Фиг. 34. Общий вид интерферометра постоянной длины.

создавая таким образом акустическую связь между микрофоном, расположенным вне трубы, и местом, где измеряется давление, внутри трубы. Этот способ был использован затем многими исследователями. Хотя этот метод весьма удобен, недостатком его следует считать искажение звукового поля, вызванное зондом. Грубые подсчеты показывают, что при этом в определении импеданса надо ожидать ошибку порядка отношения поперечных сечений зонда и трубы. Большое преимущество, естественно, имеют методы, при которых не происходит искажения звукового поля. На фиг. 33 и 34 показан интерферометр такого типа. Микрофон вмонтирован в стенку трубы позади упругой мембраны

(фиг. 35) так, что он может перемещаться вместе с трубой, в которой подобно поршням могут ходить плотно вставленные громкоговоритель и исследуемый образец. Этот метод развит несколькими исследователями [33—35] независимо друг от друга. Может показаться, что этот способ будет давать ошибку, если площадь мембраны будет порядка 1 $см^2$ или более, так как при



Фиг. 35. Разрез микрофона, вмонтированного в стенку трубы интерферометра.

таких размерах измерить звуковое давление в одной точке невозможно. Однако это неверно. Пусть, например, $r = 1$, тогда $p_{\text{мин.}} = 0$; давление в стоячей волне изменяется с расстоянием в трубе как $\sin \omega x / c_0$, где x — расстояние от рассматриваемой точки до точки минимума давления; давление вблизи точки минимума будет иметь противоположные фазы по разным сторонам от этой точки; следовательно, на мембрану, помещенную симметрично относительно точки нулевого давления, не будет действовать никакая сила. Таким же образом может быть показано, что и в общем случае, когда $|r| < 1$, никакой ошибки при измерении отношения $p_{\text{макс.}} / p_{\text{мин.}}$ не возникает [35].

§ 3. МЕТОД ВЕНТА И БЕДЕЛЛА [36]

Если вследствие перемещения образца в трубе длина трубы меняется, а колебательная скорость излучателя остается постоянной, то давление звука вблизи излучателя будет пропорционально импедансу трубы в этом месте. Следовательно, отношение $p_{\text{макс.}} / p_{\text{мин.}}$ будет равно отношению $z_{\text{макс.}} / z_{\text{мин.}}$. Если импеданс

образца известен, то это отношение можно, хотя и несколько громоздко, подсчитать с помощью уравнения (1.4). С помощью же диаграммы фиг. 11 результат может быть получен без вычислений. При изменении длины трубы значение импеданса вблизи излучателя пробегает точки, лежащие на окружности постоянного поглощения (см. фиг. 11), так как наличие слоя воздуха перед образцом не меняет поглощения.

Экстремальные значения импеданса соответствуют, очевидно, точкам пересечения окружности с вещественной осью; из (5.1) находим

$$z_{\substack{\text{макс.}\\ \text{мин.}}} = W_0 \frac{1 \pm |r|}{1 \mp |r|}.$$

Таким образом, отношение $p_{\text{макс.}}/p_{\text{мин.}}$ будет выражаться следующим образом:

$$\frac{p_{\text{макс.}}}{p_{\text{мин.}}} = \left(\frac{1+|r|}{1-|r|}\right)^2. \tag{5.6}$$

Это выражение отличается от (5.5) только показателем степени. Уравнение (5.6) служит для определения $|r|$. Фаза Δ легко находится по диаграмме фиг. 11, если известны значения длины трубы, при которых z имеет экстремальные значения. С увеличением длины трубы импеданс пробегает окружность постоянного поглощения в направлении часовой стрелки; при этом с увеличением длины трубы на полволны Δ увеличивается на 2π. Таким образом, первый максимум будет при

$$\frac{l}{{}^1/_2\lambda} = \frac{\Delta}{2\pi},$$

первый минимум при

$$\frac{l}{{}^1/_2\lambda} = \frac{\Delta+\pi}{2\pi} \quad \text{и т. д.}$$

Чтобы сохранить постоянной скорость на излучателе, Вент и Беделл использовали телефон, действующий на тяжелый поршень; звуковое давление вблизи излучателя измерялось с помощью зонда.

§ 4. МЕТОД ШИРИНЫ МАКСИМУМА ДАВЛЕНИЯ ВБЛИЗИ ИЗЛУЧАТЕЛЯ [27]

Этот метод имеет большое сходство с методом, изложенным в предыдущем параграфе. В нем также используется труба переменной длины, причем скорость излучателя поддерживается постоянной и измеряется давление около излучателя. Разница заключается, во-первых, в том, что здесь используется «точечный»

излучатель, представляющий собой узкую трубку, расположенную на оси трубы интерферометра. Такой источник звука имеет большой внутренний импеданс, поэтому он дает скорость, не зависящую от нагрузки. Давление вблизи излучателя зависит от радиуса, так как волны в этом месте неплоские. Беранек, изучавший этот вопрос, показал, что наиболее подходящим местом для измерения давления является место вблизи стенки трубы около излучателя. Кроме того, Беранек предлагает измерять не максимум и минимум давления, а определять затухание стоячей продольной волны по ширине кривой вблизи максимума давления при изменении длины трубы. При этом не нужно производить измерения малых давлений, что является большим преимуществом. Затухание, обусловленное потерями в стенках трубы, определялось при замене образца абсолютно отражающей стенкой. По этим двум значениям затухания и по соответствующим двум резонансным длинам можно подсчитать импеданс. Для увеличения точности были предприняты различные меры, например для точного измерения смещения образца использовался микрометрический винт.

Метод Беранека оригинален и во многих отношениях привлекателен. Следует отметить, однако, что доказательство ортогональности собственных функций, приведенное Беранеком, по-видимому, неверно, так как в полученном им результате отношение нормальной компоненты колебательной скорости к давлению у стенки трубы оказалось не зависящим от собственных значений, что не может быть верным. Кроме того, многие из проведенных им уточнений в аппаратуре не кажутся необходимыми вследствие неизбежности ошибок, проистекающих от закрепления образца, а также из-за разницы между образцами, сделанными из одного и того же материала, из-за некоторой неопределенности понятия поверхности образца и т. д.

§ 5. ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ, В КОТОРЫХ ИЗМЕРЯЕТСЯ РЕАКЦИЯ НА ИЗЛУЧАТЕЛЬ

Электрический импеданс всех источников звука в некоторой мере зависит от акустической нагрузки. Если излучающая поверхность (рупор, мембрана и т. д.) закреплена, то электрический импеданс на входе излучателя можно назвать *блокированным* импедансом $Z_{\text{блок.}}$. Если излучающая поверхность может колебаться, то Z будет иным. Разность $Z - Z_{\text{блок.}}$ обычно называется движущим импедансом и обозначается через $Z_{\text{движ.}}$. Импеданс $Z_{\text{движ.}}$ зависит от акустического импеданса в месте расположения колеблющейся поверхности. Следовательно, акустический импеданс можно рассчитать по замеренным значениям $Z_{\text{движ.}}$. Этот метод особенно привлекателен тем, что вся измерительная аппаратура состоит из звукового генератора и мостика. Аттенюаторы, усилители,

микрофоны и т. д. при этом не нужны. Хотя метод пока еще мало разработан, полученные результаты указывают на его большую ценность.

Можно показать, что для всех обычных излучателей имеет место следующее соотношение:

$$Z = L + \frac{M}{N+z}, \tag{5.7}$$

где L, M и N — комплексные постоянные, получающиеся из измерений и зависящие от частоты, а z — акустический импеданс вблизи излучателя. Выведем это уравнение для электродинамических громкоговорителя и телефона.

а) Реакция на электродинамический громкоговоритель. Пусть u — напряжение на катушке; i — ток в катушке; B — магнитная индукция в зазоре; l — полная длина обмотки; v — скорость катушки. Тогда

$$u = Z_{\text{блок.}} i + Blv, \tag{5.8}$$

где Blv — э.д.с. индукции, обусловленная движением. Уравнение движения в случае, когда внешней силой, действующей на систему, является только сила реакции акустической нагрузки, может быть записано в виде:

$$0 = -Bli + Z_{\text{мех.}} v, \tag{5.9}$$

где Bli — сила, действующая на обмотку. $Z_{\text{мех.}}$ состоит из двух частей: внутреннего механического импеданса рупора (масса, упругость и сопротивление) и механического импеданса со стороны катушки, обусловленного акустической нагрузкой.

Исключая v из (5.8) и (5.9) и заменяя u/i на Z, получаем

$$Z = Z_{\text{блок.}} + \frac{(Bl)^2}{Z_{\text{мех.}}}. \tag{5.10}$$

Если рупор заменить поршнем и нагрузить последний акустическим импедансом z, постоянным по всей поверхности S поршня (например, помещая излучатель в трубу интерферометра), то

$$Z_{\text{мех.}} = Z_{\text{поршня}} + zS;$$

это позволяет записать уравнение (5.10) в виде (5.7). К обычному громкоговорителю эти идеализированные уравнения, конечно, неприменимы. Однако одним из авторов [37] было показано, что формула (5.10) может быть записана в виде (5.7) и в общем случае, когда скорость колебаний меняется вдоль поверхности и когда громкоговоритель не удается установить в трубе без зазора. В этом случае M и N в (5.7) являются комплексными функциями частоты, подлежащими определению; однако L не

является блокированным импедансом, а представляет собой импеданс, определяемый при бесконечной акустической нагрузке. Благодаря гибкости рупора и утечке воздуха по краям даже при $z=\infty$ катушка блокируется не полностью.

б) Реакция на телефон. Кеннели и Пирс [38], повидимому, первые измерили механическую нагрузку в телефоне, использовав ее влияние на электрический импеданс. Фей и Холл [39] применили этот метод к трубе переменной длины, на конце которой находился образец. Справедливость формулы (5.7) для этого случая доказана Феем и Холлом, исходя из простых энергетических соображений. Используем их метод, который они применили также и к рассмотренному выше случаю. При этом полезно уточнить определения употребляемых величин. При отсутствии тока в телефоне постоянный магнит создает магнитный поток, обусловливающий силу притяжения мембраны, соответствующую положению равновесия. При малом смещении мембраны магнитный поток, а следовательно, и сила возрастают. Эта сила возникает независимо от электрической стороны системы и является внутренней силой магнетомеханической природы. Следовательно, магнитная система ведет себя как система с отрицательной упругостью. Если при этом пропускается ток, то создается добавочный магнитный поток, увеличивающий силу, действующую на мембрану. Силу, обусловленную током, будем обозначать через F. Таким же образом надо различать две составляющие э.д.с., обусловленные изменением потока. Если мембрана закреплена, то при пропускании тока имеется э.д.с. самоиндукции. Если мембране сообщается скорость, то возникает добавочная э.д.с. индукции. Последняя будет называться обратной э.д.с. и обозначаться через e.

Если, далее, i — ток, а v — скорость точки, к которой приложена сила F, то добавочная мощность ei, подводимая в каждый момент для поддержания движения, будет равна произведению Fv, т. е. излучаемой мощности:

$$ei=Fv.$$

Если теперь $e=kv$, то $i=F/k$ и, следовательно,

$$\frac{e}{i}=\frac{k^2 v}{F},$$

или

$$Z_{\text{движ.}}=\frac{k^2}{Z_{\text{мех.}}}. \qquad (5.11)$$

Отсюда следует, что $Z_{\text{мех.}}$ есть сумма внутреннего механического импеданса системы, включая и отрицательную магнитную упругость, и механического импеданса внешней акустической нагрузки по отношению к точке приложения силы F. Таким образом, мы

получили уравнение, соответствующее уравнению (5.10), относящемуся к электродинамическому громкоговорителю. Так же как и в случае громкоговорителя, полученное уравнение можно преобразовать в общее уравнение (5.7), для того чтобы учесть неодинаковую скорость движения различных точек мембраны и утечку воздуха [37].

§ 6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ

Уравнение (5.7) является основным при измерении импедансов методом реакции на излучатель. При этом постоянные L, M и N могут быть определены путем измерения электрических импедансов Z_1, Z_2 и Z_3 при нагрузке излучателя тремя известными акустическими импедансами z_1, z_2 и z_3.

Выразив величины L, M и N через Z_1, Z_2 и Z_3, уравнение (5.7) можно записать:

$$\frac{z}{\rho_0 c_0} = j\frac{Z_1 - Z_3}{Z_1 - Z_2}\,\frac{Z - Z_2}{Z - Z_3}\,.$$

Отношение $(Z_1 - Z_3)/(Z_1 - Z_2)$ можно принять за новую характеристику прибора, зависящую только от частоты.

Если мы выберем для z_1, z_2 и z_3 импеданс столба воздуха высотой соответственно $^3/_8$, $^1/_4$ и $^1/_2$ длины волны, то

$$z_1 = j\rho_0 c_0, \; z_2 = 0, \; z_3 = \infty.$$

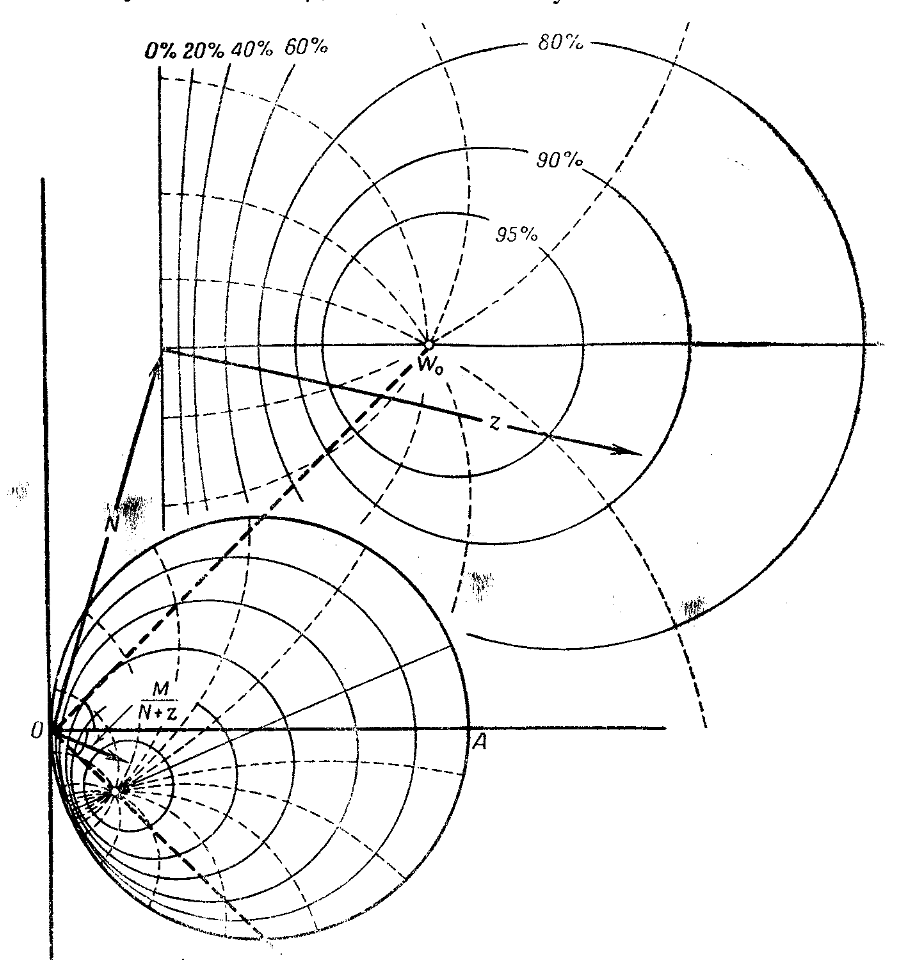
Так как в уравнение входят только *разности* импедансов, которые, как правило, на порядок меньше самих импедансов, то рекомендуется пользоваться компенсационным мостиком какого-либо вида, посредством которого скомпенсируется главная часть импеданса.

Предлагаемый способ по точности и удобству измерений уступает способам, описанным в предыдущих параграфах. При использовании телефона разности импедансов получаются не малыми лишь тогда, когда телефон настроен в резонанс. Однако в этом случае он очень чувствителен к изменению частоты звукового генератора и собственной резонансной частоты и, следовательно, к изменению температуры. При использовании громкоговорителя чувствительность к температуре имеет меньшее значение, но в этом случае на бумажный рупор влияют атмосферные условия. Это значит, что Z_1, Z_2 и Z_3 не могут быть раз навсегда измерены как функции частоты, а должны измеряться при каждом новом измерении импеданса Z.

Однако если необходимо определить один лишь коэффициент поглощения, то измерения можно провести быстро и точно, а результат получить по номограммам без вычислений. Более по-

дробные данные можно найти в работах [37] и [40], здесь же приводятся только основные положения.

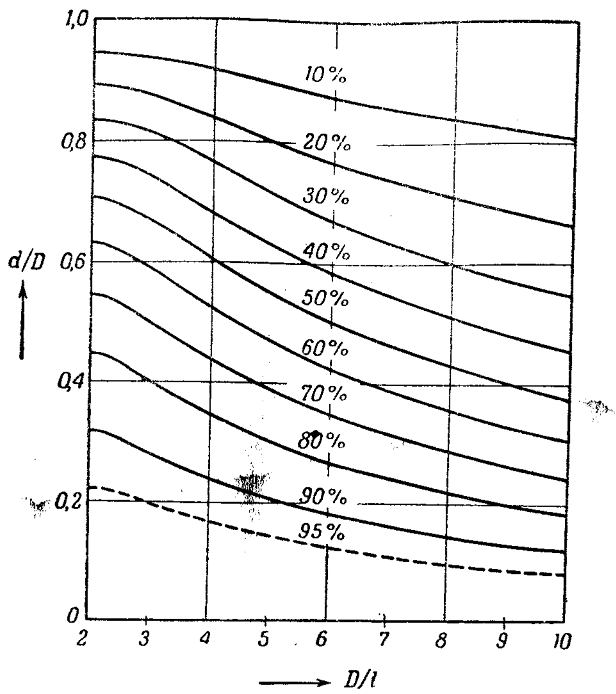
Согласно уравнению (5.7), каждой точке в плоскости комплексного переменного $M/(N+z)$ соответствует точка в плоскости



Фиг. 36. Связь между движущим импедансом и акустическим импедансом.

комплексного переменного z, так что каждому контуру в одной плоскости соответствует контур в другой плоскости. Если в плоскости комплексного переменного $M/(N+z)$ построены кривые, которым в плоскости переменного z соответствуют два семейства окружностей постоянного поглощения и постоянной фазы (см. фиг. 11), то значение r, соответствующее данной точке в плоскости

$M/(N+z)$, можно определить непосредственно по такой диаграмме. Этот способ показан на фиг. 36 для произвольных значений M и N, лишь M для простоты выбрано вещественным. Если M будет комплексным, то окружности в плоскости переменного $M/(N+z)$ (нижняя часть рисунка) повернутся вокруг начала координат 0 на угол, равный фазе M. Два семейства окружностей преобразуются в идентичные два семейства, если не считать переноса,

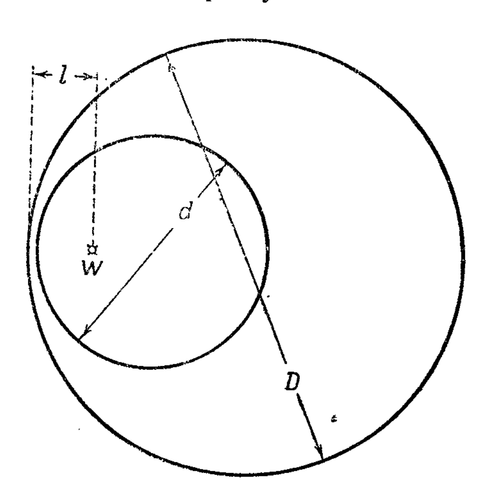


Фиг. 37. Зависимость d/D от D/l при различных значениях коэффициента поглощения (к теории интерферометра, основанного на измерении реакции).

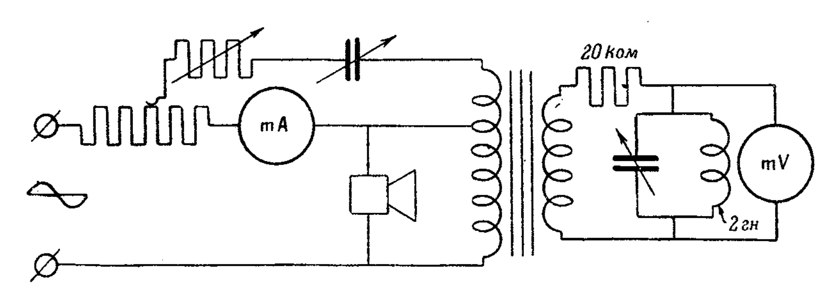
поворота и изменения масштабов. В плоскости комплексного переменного z полному отражению соответствует окружность, выродившаяся в мнимую ось, а в плоскости комплексного переменного $M/(N+z)$—окружность с диаметром OA. Точки z-плоскости, соответствующие положительному сопротивлению, лежат внутри этой окружности. Смещение ее на комплексное расстояние L дает преобразование плоскости комплексного переменного z (акустический импеданс) в плоскость комплексного переменного Z (электрический импеданс).

Если испытуемый образец и излучатель помещены на концах трубы интерферометра и образец перемещается по трубе, то импе-

данс z вблизи излучателя пробегает по окружности коэффициента постоянного поглощения. Электрический импеданс Z также пробегает окружность в своей плоскости. Костен [37] показал, что коэффициент поглощения образца имеет простую зависимость от диаметра соответственного круга в Z-плоскости, от диаметра круга, относящегося к полному отражению, и от положения точки на большом круге, соответствующей полному поглощению. Но коэффициент поглощения не зависит от величины L, входящей в уравнение (5.7). Кроме того, диаметр окружности, относящейся к полному отражению, и положение точки, соответствующей полному поглощению, почти не зависят от частоты; для обычного громкоговорителя эта зависимость выражена еще меньше, чем для телефона, поэтому эти величины достаточно измерить только один раз Следовательно, поглощение можно находить по графику типа фиг. 37, на котором изображена зависимость a_0 от d/D и D/l, где d, D—диаметр окружности в комплексной плоскости



Фиг. 38. Геометрический смысл величин D, d и l.



Фиг. 39. Электрическая схема для измерения реакции.

электрического импеданса, относящейся соответственно к испытуемому образцу и образцу со 100-процентным отражением; l—расстояние от точки, соответствующей 100-процентному поглощению, до окружности, относящейся к случаю 100-процентного отражения (фиг. 38). Величина d должна быть получена из измерений, а D и l известны из предыдущих измерений. Электрическая схема

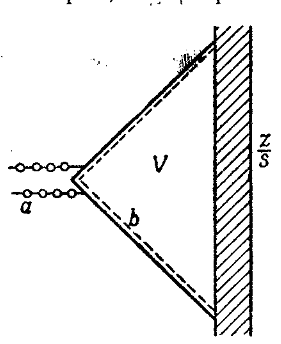
соответственного прибора показана на фиг. 39. Постоянство тока через громкоговоритель с низким полным сопротивлением поддерживается с помощью высокого сопротивления, включенного последовательно. Напряжение, подаваемое на громкоговоритель, измеряется ламповым вольтметром. Это напряжение может быть компенсировано добавочным регулируемым напряжением. После компенсации длина интерферометра меняется до тех пор, пока показание лампового вольтметра не будет наибольшим. Показание вольтметра пропорционально диаметру импедансного круга.

Результаты для коэффициента поглощения воспроизводились [40] с точностью до второго десятичного знака. Таким образом, этим способом можно получить такую же точность, что и другими способами, а аппаратура в данном случае гораздо проще.

Несомненно, что этот метод может быть применен также для измерений импеданса, хотя по этому вопросу пока опубликованных работ не имеется. Таким способом также могут быть измерены фазовые углы, если фиксировать соответствующим образом расположение излучателя.

§ 7. ИМПЕДАНСНЫЙ ИНДИКАТОР ГЕЛЮКА

Сравнительно недавно Гелюк [41] предложил остроумный аппарат, в котором экран катодного осциллографа используется в качестве комплексной плоскости z. На экране автоматически получаются как модуль измеряемого импеданса, так и его фаза. Так как измерение производится мгновенно, то, меняя частоту, можно за несколько секунд получить полный импедансный контур и при желании сфотографировать его.



Фиг. 40. Излучатель с антирупором для импедансного индикатора.

Обычный громкоговоритель прикладывается к образцу или испытуемой стенке (фиг. 40). Звуковое давление между рупором и образцом измеряется небольшим конденсаторным микрофоном; при этом изменение звукового давления преобразовывается в изменение емкости. Смещение рупора также преобразовывается в изменение емкости; это достигается тем, что рупор громкоговорителя покрывается тонким проводящим слоем, а внутри него на небольшом расстоянии помещается второй неподвижный конус из проводящего материала (на фиг. 40 обозначен через b), называемый антирупором. Последний перфорирован, чтобы не препятствовать колебаниям рупора. Изменения емкости, пропорциональные соответственно давлению и смещению, преобразуются в изменения

электрических напряжений с помощью двух одинаковых высокочастотных устройств. Изменение напряжения, обусловленное смещением рупора, умножается на мнимую единицу (путем изменения фазы на 90°). Таким образом мы получаем напряжение, пропорциональное скорости смещения рупора. Последняя автоматически поддерживается постоянной путем регулирования выходного напряжения генератора с помощью звукозаписывающего прибора типа Нейман. Таким образом, напряжение, обусловленное звуковым давлением, будет пропорционально отношению p/v. Если мы сможем изобразить на экране осциллографа как величину этого напряжения, так и фазу, то тем самым определим импеданс. Для того чтобы это осуществить, надо получить при помощи добавочной электрической схемы напряжение, равное по величине напряжению, обусловленному звуковым давлением, но отличающееся по фазе на 90°. Оба эти напряжения надо подавать на обе пары пластин осциллографа, что позволит получить на экране изображение окружности с радиусом, пропорциональным давлению, т. е. импедансу z. Затем электронный пучок погашается по всей окружности за исключением того момента, когда скорость проходит через нуль в положительном направлении. Таким образом, на экране получается одна точка, изображающая импеданс как по величине, так и по фазе.

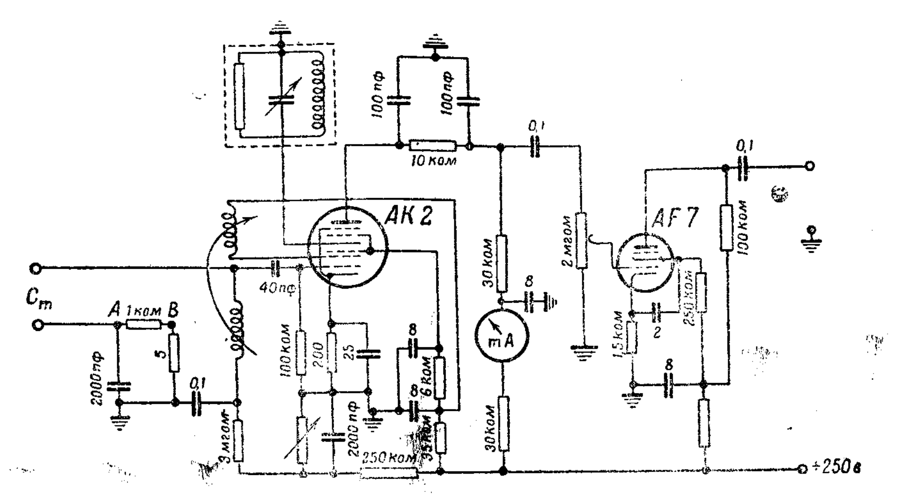
Недостатки этого способа очевидны. Едва ли можно ожидать такой же точности, как и в случае интерферометра. Кроме того, аппаратура значительно сложнее, и для определения абсолютной величины импеданса необходима калибровка. Однако в тех случаях, когда желательно быстрое сравнение импедансных контуров, например при распознавании материалов или при исследовании свойств поглощающего слоя в готовых помещениях, этот метод может оказаться ценным.

Прежде чем говорить подробно об устройстве аппаратуры, обратимся к получающейся на экране картине. Скорость v, очевидно, пропорциональна средней скорости рупора и не зависит от ее распределения по поверхности рупора. Конденсаторный микрофон, измеряющий давление, помещается весьма близко к поверхности рупора, так что получаемое отношение p/v представляет собой приблизительно импеданс вблизи поверхности рупора. Пространство между рупором и образцом можно рассматривать как короткую трубу интерферометра с эффективной длиной l, равной объему, заключенному в этом пространстве, деленному на поверхность. Так как влияние столба воздуха на импеданс сводится к его повороту на комплексной плоскости в направлении часовой стрелки по кругу постоянного поглощения (см. фиг. 11), причем скачок фазы Δ равен 2π для каждой половины длины волны λ, то поправка, обусловленная эффективной длиной l, есть поворот импеданса против часовой стрелки по кругу

постоянного поглощения. При этом поправка к фазе будет $2\pi l/\frac{1}{2}\lambda$. Как легко видеть, эта поправка уменьшается с понижением частоты. Кроме того, она не влияет на коэффициент поглощения.

§ 8. ДЕТАЛИ ИМПЕДАНСНОГО ИНДИКАТОРА

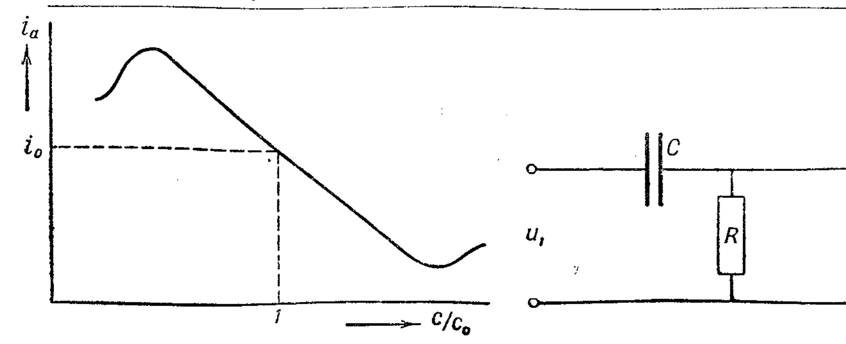
В импедансном индикаторе давление и колебательная скорость преобразуются в изменения емкости. Колебания емкости



Фиг. 41. Схема, используемая при измерении малых изменений емкости.

в свою очередь с помощью несколько модифицированного метода Закариаса [42] преобразуются в колебания тока. Так как этот метод значительно отличается от обычно употребляемой схемы Риггера [43], то мы дадим краткое его описание (фиг. 41). Переменная емкость C_m составляет часть емкости высокочастотного LC-контура в высокочастотном генераторе, в котором используется октод АК2 фирмы Филипс. К четвертой сетке лампы подключен контур, настроенный при равновесном значении емкости C_m на частоту генератора. В качестве усилителя используется лампа типа AF7. Вычисления показывают, что анодный ток генераторной лампы зависит от емкости LC-контура в соответствии с фиг. 42. Во избежание искажений работа происходит на прямолинейном участке характеристики. Можно показать, что крутизна зависит от частоты и схемных постоянных, которые легко могут быть определены. Таким образом, мы получаем способ измерения абсолютной величины относительного изменения емкости.

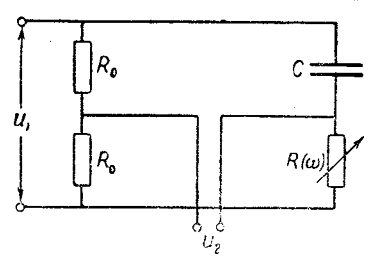
Рассмотрим прежде всего изменение емкости, обусловленное движением рупора. Оно пропорционально смещению подвижной



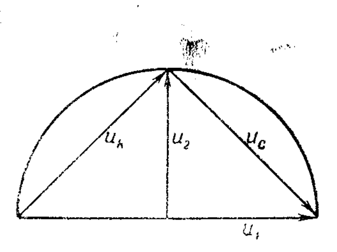
Фиг. 42. Характеристика схемы, изображенной на фиг. 41.

Фиг. 43. Фазовращатель на 90°.

части конденсатора. Коэффициент пропорциональности может быть определен из измерения равновесного значения изменяющейся части емкости и емкости добавочного конденсатора в LC-контуре. Таким образом, усилитель дает напряжение, пропорциональное перемещению. Для этого напряжения может быть дана абсолютная градуировка. Это напряжение u_1 преобразуется обычным способом в напряжение u_2, пропорциональное скорости, с помощью ячейки RC (фиг. 43), в которой $RC=10^{-5}$, что обеспечивает приемлемое преобразование до частот 1000 *гц*.



Фиг. 44. Схема фазовращателя с изменением фазы на 90° (независимо от частоты) и без изменения величины выходного напряжения.



Фиг. 45. Векторная диаграмма к фиг. 44.

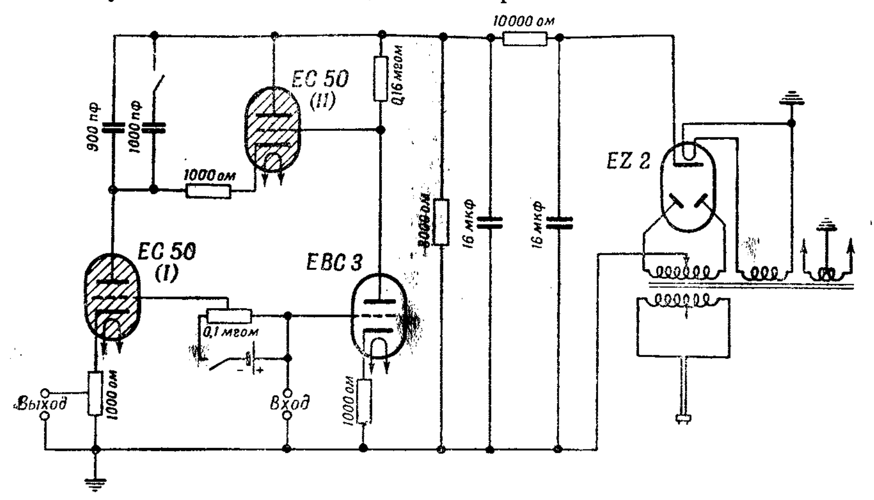
Калибровка конденсаторного микрофона *относительным* методом обычно выполняется путем подачи переменного напряжения той же самой частоты, что и частота звука, на пластинки конденсатора; это напряжение накладывается на постоянное напряжение u_0: $u=u_0+u_1\cos\omega t$, причем $u_1 \ll u_0$. Сила взаимодействия между пластинками изменяется пропорционально квадрату напряжения. Следовательно, эквивалентное звуковое давление равно

$$f_K\, 2u_0u_1\cos\omega t.$$

Член, содержащий u_0^2, пропадает, так как u_0 постоянно; членом же, содержащим u_1^2, можно пренебречь. Постоянная f_k не зависит от частоты. Теперь переменный анодный ток генератора запишется в виде

$$i = f_\omega f_k \, 2u_0 u_1 \cos \omega t,$$

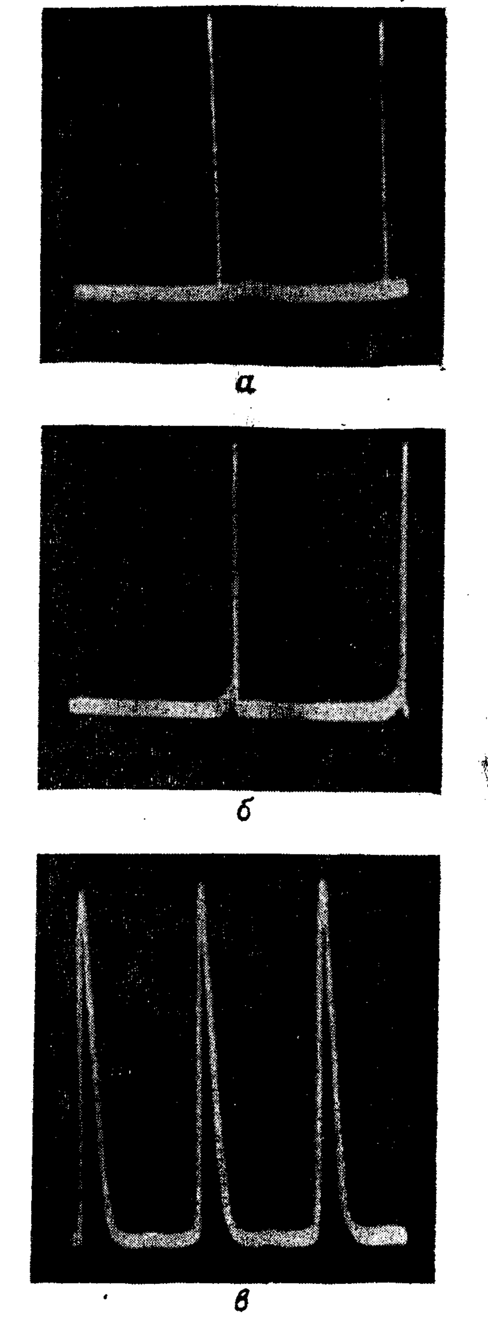
где f_ω—функция частоты, зависящая от механических свойств микрофона и электрических постоянных аппаратуры. Измерение амплитуды тока i как функции ω при постоянных u_0 и u_1 дает величину f_ω с точностью до постоянного множителя. *Абсолютная* калибровка проводится по изменению постоянного тока, вызванному очень малым статическим избыточным давлением, измеряемым чувствительным микроманометром.



Фиг. 46. Импульсный генератор.

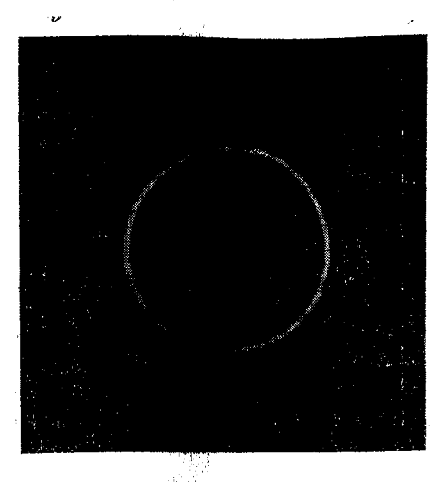
Напряжение, обусловленное звуковым давлением, подается на одну пару пластин осциллографа. Это же напряжение, сдвинутое на 90° посредством устройства, показанного на фиг. 44 (см. также векторную диаграмму на фиг. 45), подается на другую пару пластин. При каждом значении частоты $R(\omega)$ должно иметь подходящую величину; оно изменяется обратно пропорционально частоте. Это осуществлялось автоматически сцеплением оси переменного конденсатора звукового генератора с осью переменного проволочного сопротивления $R(\omega)$, сконструированного специально для этой цели.

Для подавления изображения на экране во всех точках, кроме одной, был применен синхронный импульсный генератор (фиг. 46). В нем постоянное напряжение с выпрямителя делится двумя тиратронами EC50. Первый (левый) зажигается, как только входное



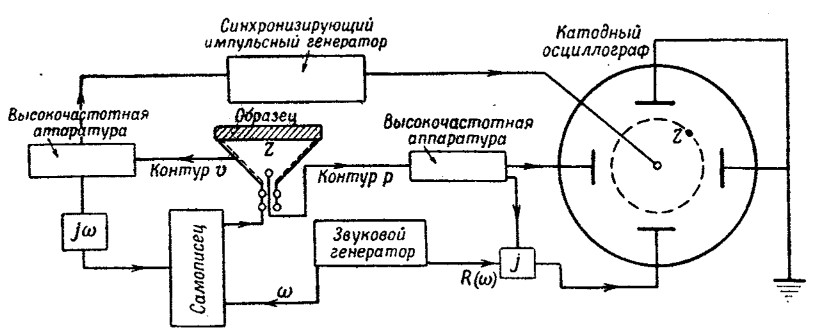
Фиг. 47. **Периодические импульсы:**
а—частота 100 *гц*; *б*—**1000** *гц*; **в**—**10 000** *гц*.

напряжение становится положительным, заряжая при этом за очень короткое время конденсатор в своей анодной цепи и давая, таким образом, короткий импульс на выходе. Этот процесс длится



Фиг. 48. Картина на экране осциллографа.

примерно в течение $^3/_4$ периода, до тех пор пока возрастающее отрицательное напряжение на сетке ЕВС3 не приведет к зажиганию тиратрона II. Это возвратит систему в исходное состояние.



Фиг. 49. Скелетная схема импедансного индикатора.

Форму и частоту следования импульсов можно наблюдать на фотоснимках, приведенных на фиг. 47.

Импульс подается на управляющую сетку осциллоскопа; таким образом, изображение в момент импульса подсвечивается (фиг. 48).

Скелетная схема установки показана на фиг. 49.

Глава VI

ОПЫТНЫЕ ДАННЫЕ. СРАВНЕНИЕ С ТЕОРИЕЙ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже приводятся результаты измерений для некоторых типичных материалов, представленные в основном в графическом виде в плоскости комплексного переменного z; на диаграммах изображается также шкала частот в сотнях герц. По этим диаграммам сразу можно определить резонансные и антирезонансные частоты, степень затухания, а также коэффициент поглощения в зависимости от частоты. Кроме того, по искажениям импедансных контуров можно судить о неоднородности испытуемого образца. Графическое изображение зависимости вещественной части импеданса и коэффициента при его мнимой части от частоты, что обычно приводится в литературе, оказывается менее наглядным.

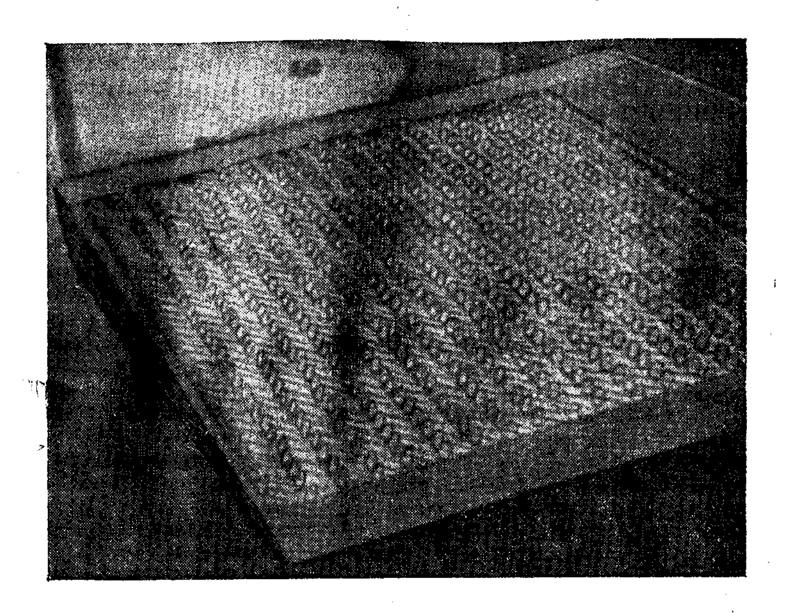
Трудность, встречающаяся при всех измерениях импеданса, заключается в некоторой неопределенности скачка фазы Δ, обусловленной неопределенностью того, какую координату приписать поверхности образца вследствие некоторой шероховатости этой поверхности. Если поверхность очень неровная, неопределенность может достигать 1—2 *мм*. Если выбрать координату поверхности на Δx впереди действительного положения поверхности, замеряемый скачок фазы уменьшится на $2\pi\,(2\Delta x/\lambda)$, что равно набегу фазы волны при прохождении волной удвоенного расстояния Δx. В плоскости импеданса это соответствует смещению всех измеряемых импедансов вдоль круга постоянного поглощения по часовой стрелке. Для импедансов, бо́льших по сравнению с W_0, такое смещение фазы может сильно изменить значение импеданса, а следовательно, и форму импедансного контура. Этот факт следует иметь в виду при анализе импедансных контуров в плоскости комплексного переменного z.

Так как понятие структурного фактора k, введенного авторами, пока еще не нашло общего применения, то мы вначале приведем несколько опытных данных, из которых будут видны смысл и важность этой величины. Затем мы приведем данные, относящиеся к более практическим случаям, которые могут служить для пояснения наших теоретических рассуждений. Порядок изложения будет такой же, как и в главах, содержащих теоретическую часть. Большинство приведенных данных получено с помощью интерферометра старого типа (прототипа интерферометра, изображенного

на фиг. 33), не дающего достаточно точных данных, особенно для фазы. Как уже было указано в гл. I, экспериментальные кривые в случае необходимости сглаживаются, но без изменения их общего характера. Лишь результаты Беранека (см. § 4) оставлены в первоначальном виде.

§ 2. ОПЫТЫ НА ИСКУССТВЕННЫХ ОБРАЗЦАХ

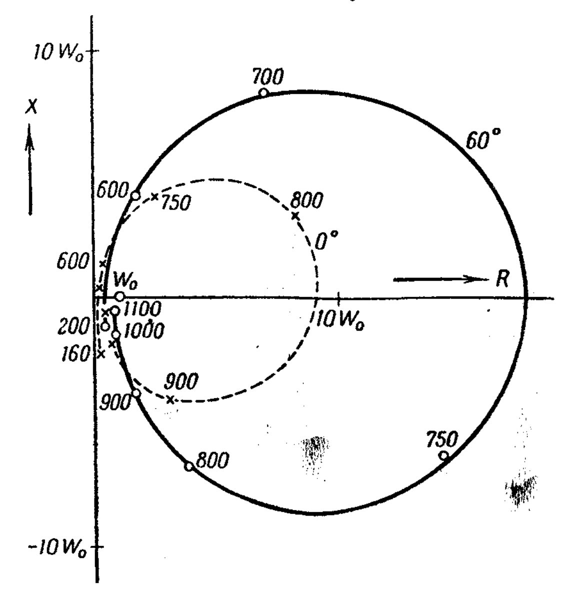
Опыты проводились над образцами, сделанными из стеклянных трубок, собранных в форме сот, причем оси трубок составляли прямой угол с поверхностью образца. В этом случае $k=1$, причем



Фиг. 50. Образец поглощающей конструкции из стеклянных трубок с наклоном 60°.

можно ожидать, что сопротивление будет согласовываться с теорией Кирхгофа. Расположение таких же трубок под косым углом представляет случай, когда структурный фактор больше единицы. Если наклон составляет 60°, то $k=4$. При тех же самых трубках толщина образца в этом случае в 2 раза меньше. Скорость звука в направлении нормали обратно пропорциональна $\sqrt{k}$, т. е. уменьшается также в 2 раза. Следовательно, резонансные частоты не должны изменяться. Впрочем, это видно также и из того, что резонансные частоты трубки не зависят от ее наклона. Однако отсюда видно, что резонансная частота для образца заданной толщины зависит от наклона.

На фиг. 50 показан образец с наклонными трубками (размеры образца около 20×20 *см*^{2}, длина трубок примерно 20 *см*). Импедансные контуры образцов с наклонами трубок 0° и 60° приведены на фиг. 51. Зависимость коэффициента поглощения от частоты показана на фиг. 52, откуда видно, что резонансные частоты для обоих образцов почти одинаковы. Легко можно проверить, что импедансы обоих образцов отличаются друг от друга только множителем $\sqrt{k}$, т. е. в нашем случае в 2 раза; при большем наклоне

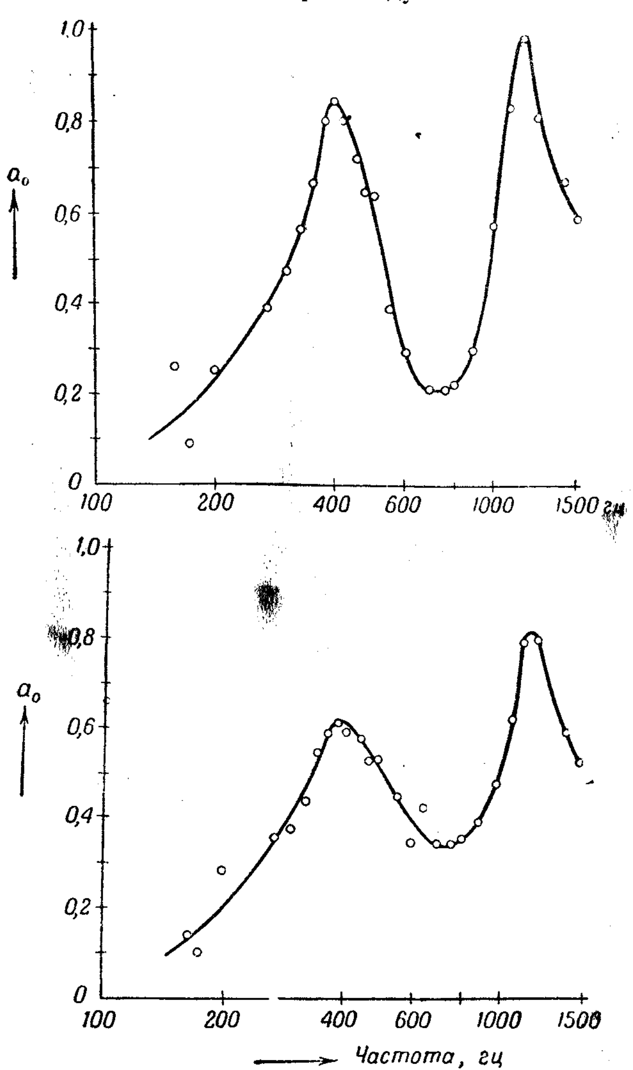


Фиг. 51. Импедансные контуры для образцов из стеклянных трубок с наклонами 0° и 60°.

трубок получается больший импеданс. Это заключение можно вывести непосредственно из того факта, что при наклоне 60° число трубок вдвое меньше, чем при отсутствии наклона. Формально этот результат можно получить также и из общего уравнения (1.14). В самом деле, в нем величина K не изменяется; величина же $\rho = k\rho_0 + (\sigma/j\omega)$ увеличится в k раз, так как σ пропорционально k, а l уменьшится в $\sqrt{k}$ раз. Фиг. 51 находится в согласии с этими выводами. Количественно сопротивление оказалось примерно в 3 раза больше, чем по теории Кирхгофа. В дальнейшем выяснилось, что это объясняется действием промежутков между трубками. За подробными объяснениями читатель может обратиться к оригинальным работам [44].

Второй интересный образец показан на фиг. 53. Он состоит из пяти листов перфорированного «непористого» материала

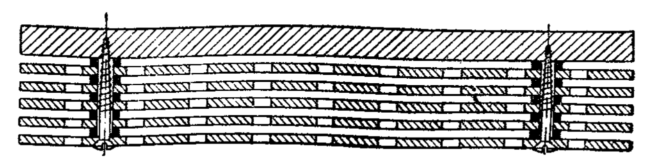
(дерево), толщиной 4 *мм* и с расстоянием между листами 4 *мм*, диаметр отверстий 3,8 *мм*. На образце размером 20×20 *см*² сделано 232 отверстия. Некоторая часть зазора между пластинками была занята



Фиг. 52. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для случая импедансных контуров фиг. 51.

деталями, скрепляющими листы. Найденное с учетом этого обстоятельства значение k (отношение полного объема воздуха в образце к объему отверстий в пластинках) оказалось равным 7,84.

Резонансная частота равнялась 750 *гц*. Если учесть поправку на открытые входные концы каналов, то скорость звука оказывается



Фиг. 53. Образец с искусственными боковыми порами.

равной 4·0,041·750=123 *м/сек*; это дает значение k, равное $(348,5/123)^2=8,0$, что находится в достаточно удовлетворительном согласии со значением 7,84.

§ 3. НЕПРОНИЦАЕМЫЕ МАТЕРИАЛЫ С ВЫСОКОЙ УПРУГОСТЬЮ

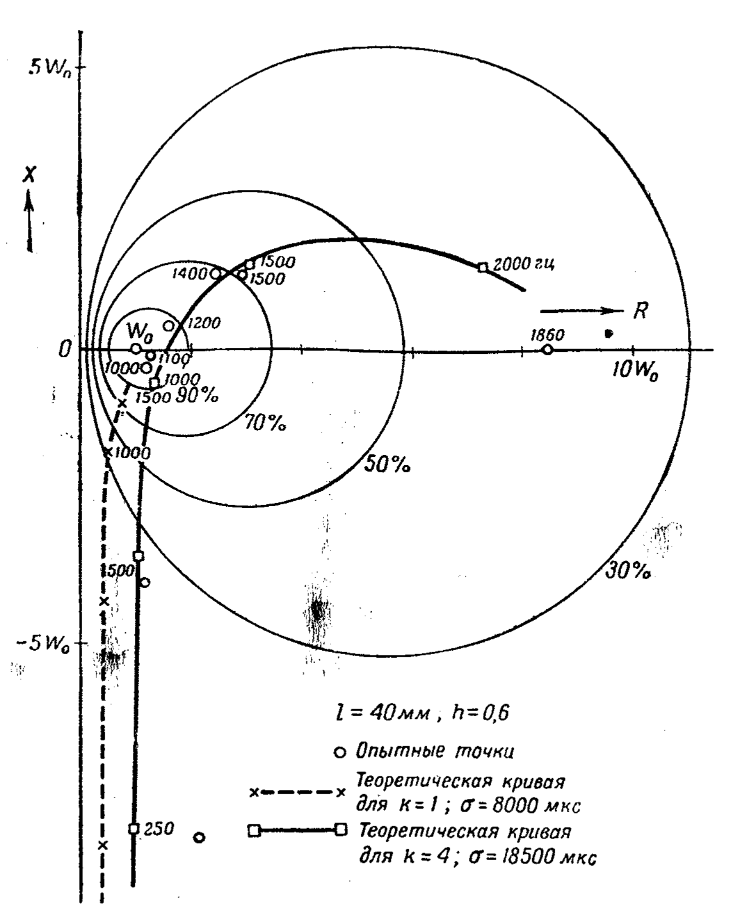
Наилучшим материалом такого рода является ячеистая резина. Опытные данные для нее приведены в гл. I, § 7 (см. фиг. 12 и 13). Ее плотность составляет 116 *кг/м³*, статический модуль упругости $G=0,17$ *кг/см²*. Найденное по резонансной частоте динамическое значение полной упругости равно 3,3 *кг/см²*. Так как объем воздуха в резине составляет приблизительно 88% общего объема (что следует из значения плотности), то упругость воздуха составляет приблизительно 1,4/0,88=1,6 *кг/см²*. Отсюда следует, что динамическая упругость резины равна 1,7 *кг/см²*, т. е. в 10 раз больше, чем G. Предполагая коэффициент Пуассона равным, например, 4, получаем $K_{1\ \text{стат.}}/G=3$, откуда $K_{1\ \text{дин.}}/K_{1\ \text{стат.}}=10/3$.

Вследствие того, что материалы такого типа дают сильное селективное поглощение, они мало пригодны для широкого использования.

§ 4. ПОРИСТЫЕ МАТЕРИАЛЫ С ТВЕРДЫМ СКЕЛЕТОМ

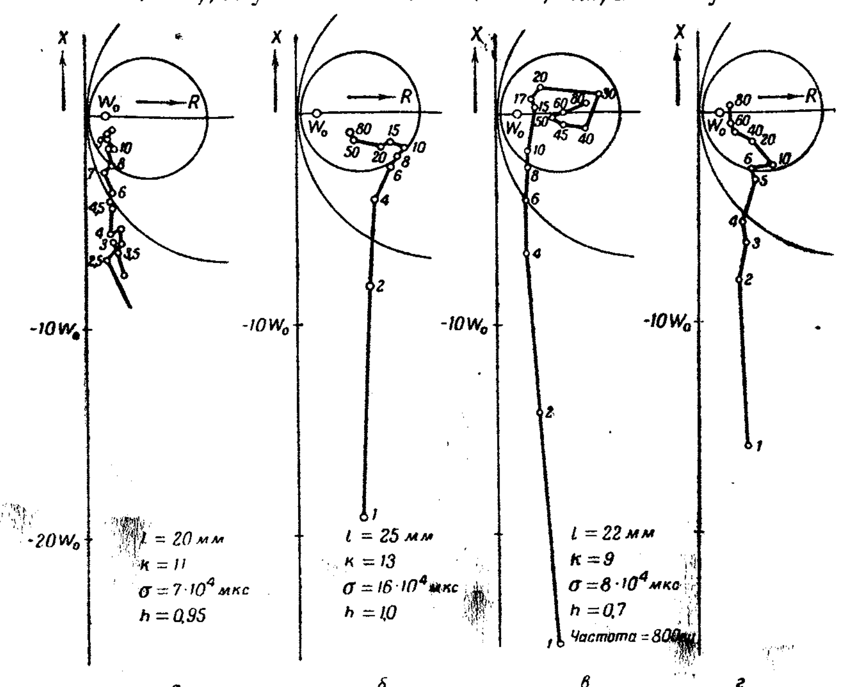
Хорошим примером материалов с твердым скелетом являются акустические штукатурки. С другой стороны, нельзя утверждать заранее, что к этому классу материалов относятся такие материалы, как войлок, минеральная вата, древесная вата и т. д., так как их воздушное сопротивление довольно велико.

Однако опыт показывает, что импедансные контуры для перечисленных выше мягких материалов (а также для слоев мягкой губчатой резины), имеющих поры на лицевой поверхности (см. § 5), имеют тот же вид, что и в случае штукатурки. Типичный пример контура для акустической штукатурки приведен на фиг. 54. Из теоретических кривых следует, что структурный фактор должен равняться примерно 4. Видно, что более высокое воздушное сопротивление, вероятно, увеличивает коэффициент поглощения, по крайней мере при низких частотах.



Фиг. 54. Опытные и теоретические кривые для образца **акустической** штукатурки.

На фиг. 55 показаны импедансные контуры для волосяного войлока (толщина 2 *см*, плотность 100 *кг/м*³), пермакустика [27] (толщина 2,5 *см*), акустекса [27] (толщина 2,2 *см*) и санакустика [27].

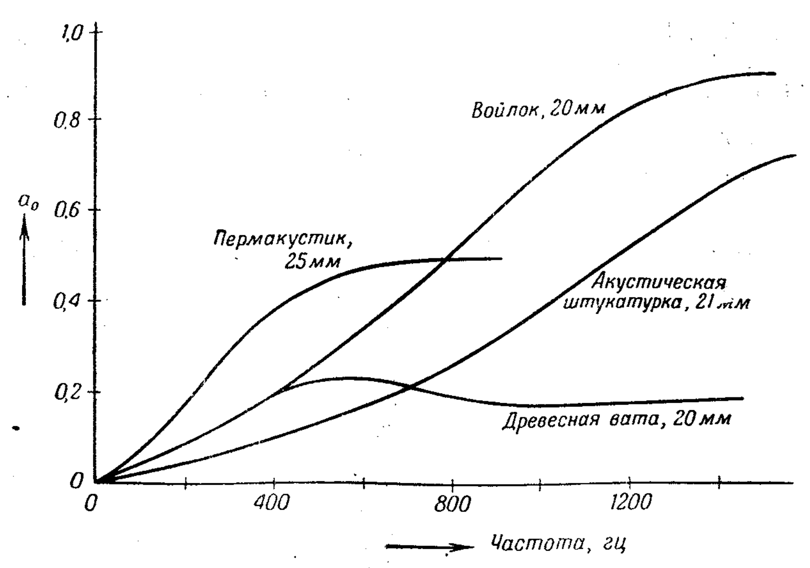


Фиг. 55. Импедансные контуры пористых материалов с упругим скелетом:

а—для волосяного войлока; *б*—для пермакустика; *в*—для акустекса; *г*—для санакустика; указаны частоты в сотнях герц.

Как показали Морз, Болт и Браун [45], импедансные контуры для последних трех материалов могут быть получены теоретически. Необходимые для согласования с опытом численные значения пористости, сопротивления и структурного фактора указаны на рисунке. Согласие теории с опытом достаточно удовлетворительное, за исключением случая низких частот. При низких частотах, как правило, структурный фактор следует брать больше. Это указывает на то, что, по крайней мере для указанных материалов, часть воздуха не может принимать участия в колебательном процессе на частотах примерно от 800 *гц* и выше.

Беранек построил также импедансный контур для целотекса С-4 толщиной 3,18 *см*. Для этого материала общее теоретическое выражение, справедливое для однородных материалов, теряет силу, что, впрочем, не является неожиданностью (см. § 8).



Фиг. 56. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для некоторых пористых материалов.

Кривые зависимости коэффициента поглощения для рассмотренного класса материалов приведены на фиг. 56. Общим их свойством является малое поглощение при низких частотах.

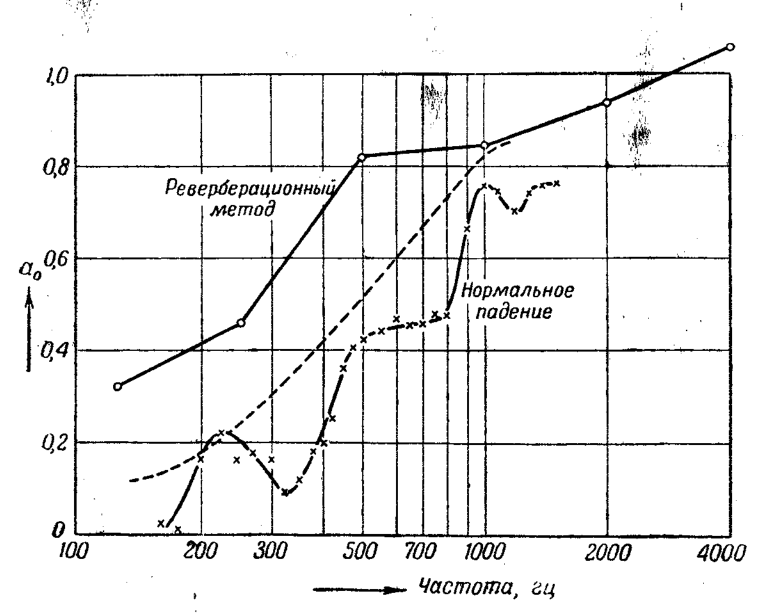
§ 5. ПОРИСТЫЕ МАТЕРИАЛЫ С УПРУГИМ СКЕЛЕТОМ И ОТКРЫТЫМИ ПОРАМИ

На фиг. 57 показаны кривые зависимости коэффициента поглощения от частоты для трех образцов пористой резины. Для образца латисел воздушное сопротивление так мало, что незаметно никакого эффекта связи ($\sigma \approx 20000$ МКС). Это видно также из импедансного контура, который очень похож на импедансный контур волосяного войлока (см. фиг. 55,*а*). Импедансный контур латисел соответствует статическому значению σ и структурному фактору, равному 7. Воздушное сопротивление образца данлопило примерно в 10 раз больше, что приводит к более или менее связанным колебаниям и селективному поглощению при резонансных частотах, соответствующих колебаниям скелета.

Известно, что коэффициент поглощения, определяемый в реверберационной камере, как правило, выше коэффициента поглощения, полученного методом трубы, где имеет место нормальное падение волн. На фиг. 58 для сравнения приведены данные, относящиеся к обоим случаям. Данные, относящиеся к реверберационному способу, были получены в камере объемом 165 $м^3$ с полом площадью 10,3 $м^2$, покрытым пористой резиной данлопило.

1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
a_0
0
400
800
1200
1600
Частота, гц
Пористая резина латисел, 30 мм
Пористая резина данлопило, 19 мм
Пористая резина латисел, 19 мм

Фиг. 57. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для слоев пористой резины с непокрытой лицевой поверхностью.

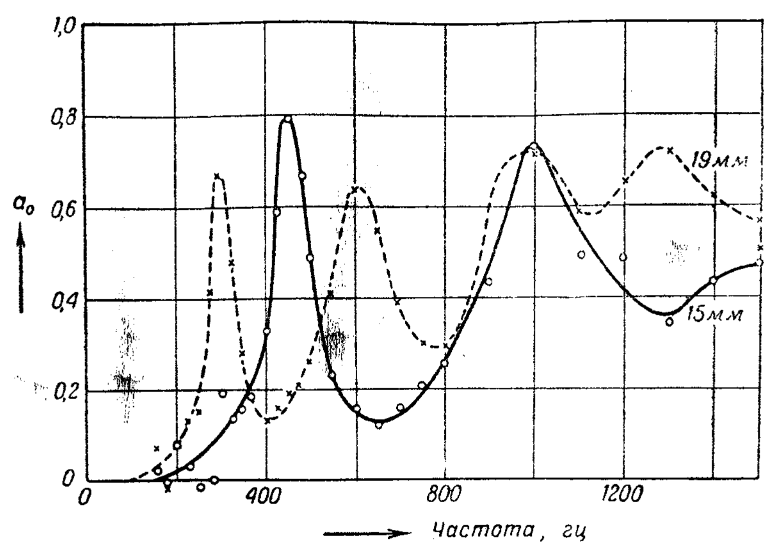


Фиг. 58. Зависимость коэффициента поглощения от частоты, измеренная с помощью интерферометра и реверберационным способом.

Пунктирная кривая рассчитана по данным, полученным с помощью интерферометра в предположении, что импеданс вещественный (что в действительности неверно) и не зависит от угла падения. При этом производилось усреднение коэффициента поглощения по всем углам в предположении диффузного падения.

§ 6. ПОРИСТЫЕ МАТЕРИАЛЫ С УПРУГИМ СКЕЛЕТОМ И ЗАКРЫТОЙ ПЕРЕДНЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

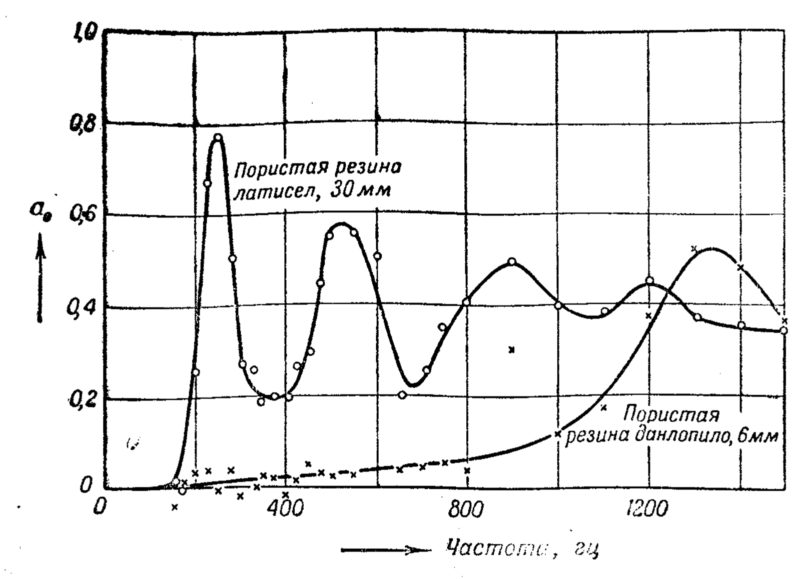
На фиг. 59, 60 и 61 приведены характеристики тех же материалов, которые рассматривались в предыдущем параграфе, но только покрытых тонким непроницаемым слоем весом 0,1 *кг/м*^{2}.



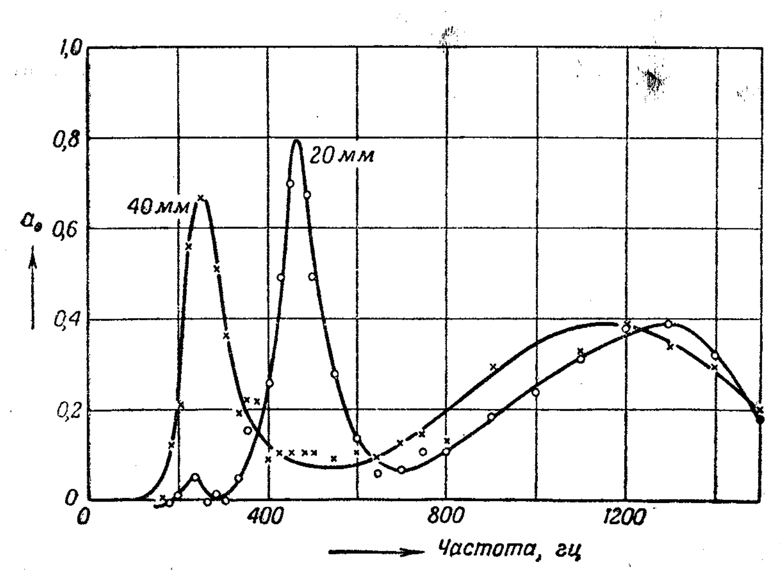
Фиг. 59. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для слоев из пористой резины (латисел) при покрытой лицевой поверхности.

Образцы изготовлялись в лабораторных условиях. В качестве покрывающего слоя использовался материал типа целлофана. Свойства покрытых материалов таковы, что эти материалы можно считать типичными представителями класса материалов, обладающих высокой упругостью и пористостью. Влияние покрытия можно видеть из фиг. 62 (кривые сглажены).

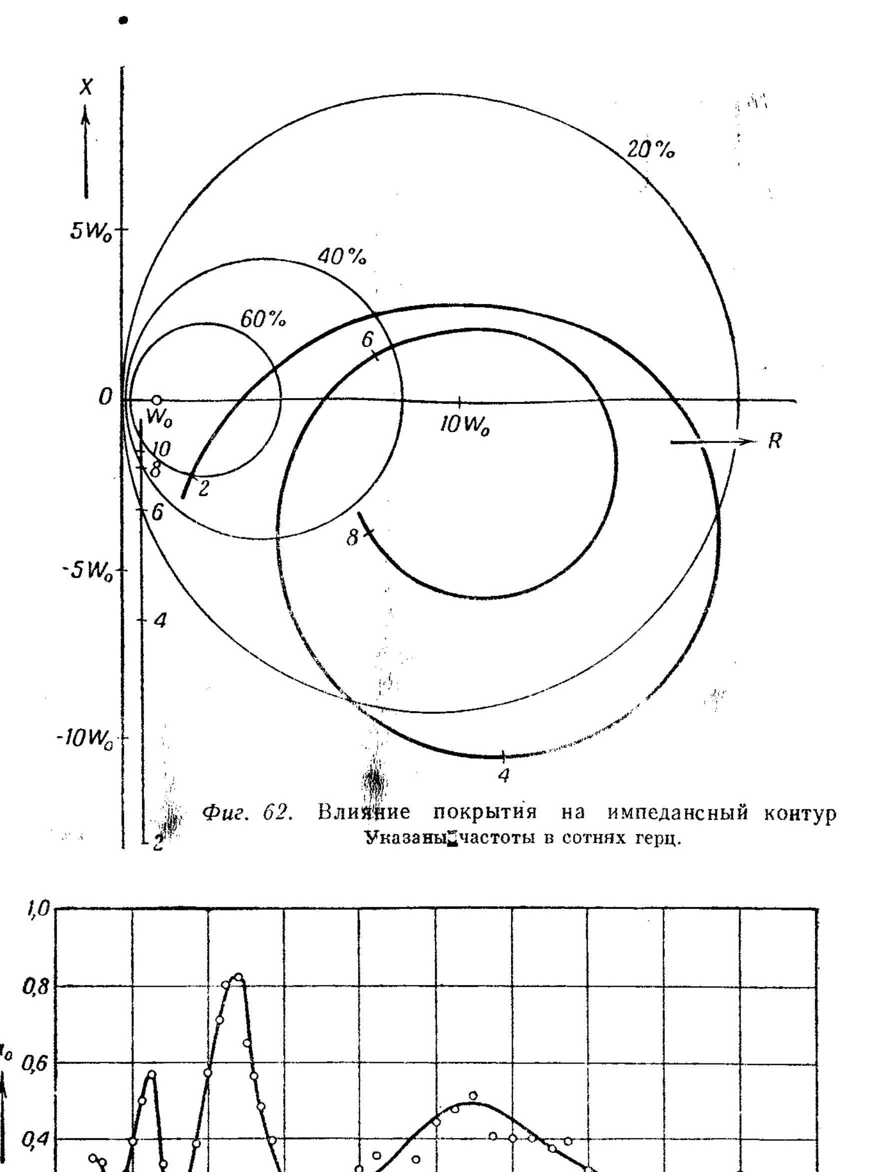
Для получения практического материала слой резины данлопило был покрыт тонким непроницаемым слоем из ткани, латекса и краски. Так как этот слой сравнительно тяжел, то поглощение при высоких частотах оказывается несколько ухудшенным. Тщательные измерения реверберационным способом были проведены



Фиг. 60. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для покрытых слоев из пористой резины.



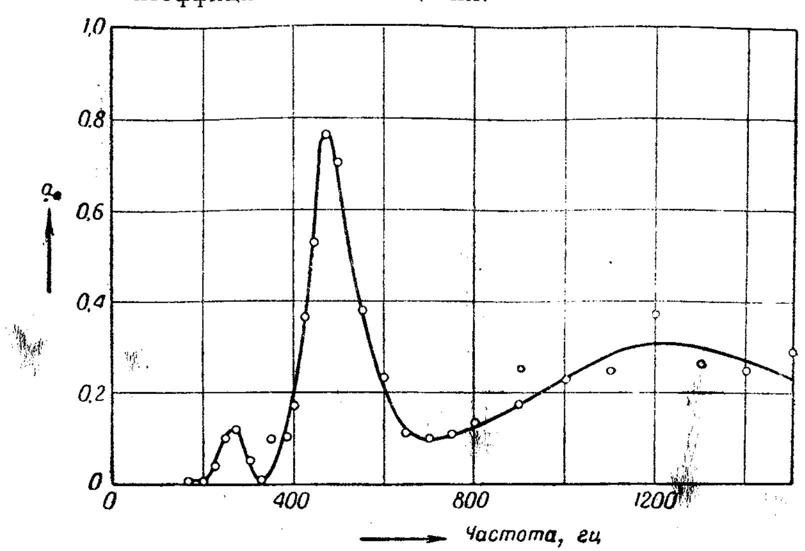
Фиг. 61. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для покрытых слоев из пористой резины.



Фиг. 62. Влияние покрытия на импедансный контур Указаны частоты в сотнях герц.

Фиг. 63. Коэффициент поглощения для покрытой пористой резины, полученный реверберационным способом.

в камере объемом 165 *м*³ с образцом, поверхность которого составляла 8,4 *м*²[13]. Результаты измерений показаны на фиг. 63. В опытах использовались чистые тона. Каждая точка на фиг. 63 представляет результат усреднения из 100 измерений. Для сравнения были произведены также измерения на малом образце с помощью интерферометра (фиг. 64). Общий вид обеих кривых одинаков. Как обычно, реверберационный метод дает большее значение коэффициента поглощения.



Фиг. 64. Коэффициент поглощения того же образца, что и на фиг. 63, полученный с помощью интерферометра.

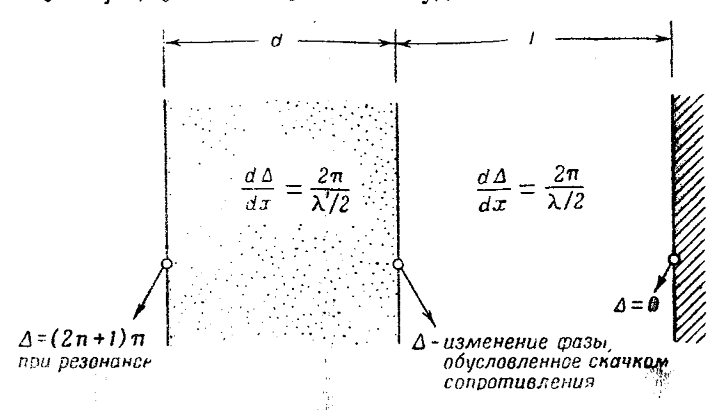
Результаты этого и предыдущего параграфов могут быть использованы для проверки изложенной в гл. III теории связанных колебаний. Этот вопрос отчасти уже рассмотрен в опубликованных работах [13]. Для более полного анализа необходимы более подробные измерения.

§ 7. ПОРИСТЫЙ МАТЕРИАЛ, РАСПОЛОЖЕННЫЙ НА НЕКОТОРОМ РАССТОЯНИИ ОТ СТЕНКИ

Импеданс любого поглощающего слоя при низких частотах определяется упругостью содержащегося в порах воздуха; инерционным же эффектом при этом можно пренебречь (см. гл. II, § 7). Импеданс при этих частотах, как правило, чисто мнимый с большим отрицательным коэффициентом, что приводит к низкому поглощению. При этом импеданс пропорционален упругости, т. е. обратно пропорционален толщине слоя. Вместо того

чтобы для уменьшения импеданса пользоваться очень толстыми поглощающими слоями, иногда упругость воздуха уменьшают тем, что поглощающий материал устанавливают на некотором расстоянии от твердой стенки.

Расчет импеданса для такой конструкции не сложен. Импеданс слоя воздуха, толщиной l, между стенкой и поглощающим слоем равен $W_0 \operatorname{cth} j\omega l/c_0$. Это выражение будет импедансом на задней

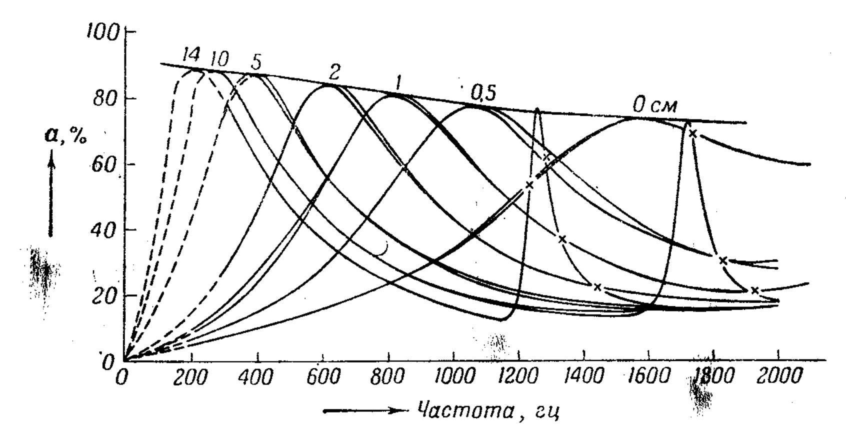


Фиг. 65. К вычислению резонансных частот.

стороне поглощающего слоя, толщина которого d. Если волновой импеданс W и постоянная распространения γ поглощающего слоя известны, то его импеданс на лицевой стороне легко может быть подсчитан по общей формуле (1.4), дающей импеданс слоя с заданными W и γ и с заданным импедансом на задней стороне. Величины W и γ являются, вообще говоря, комплексными, что затрудняет вычисления. Однако приближенно резонансные частоты, т. е. частоты, при которых коэффициент поглощения достигает максимума, могут быть легко найдены. Для этого пренебрежем затуханием звука в материале; тогда импеданс будет чисто мнимым и резонанс наступит, когда этот импеданс обратится в нуль. Расчет можно заменить построением на мнимой оси круговой диаграммы, что выполняется с помощью фиг. 65.

Фазовый угол Δ комплексного коэффициента отражения r вблизи твердой стенки равен нулю. Этот угол изменяется на 2π при прохождении половины длины волны в воздухе. Изменение фазового угла коэффициента отражения на расстоянии всего воздушного зазора равно $l\,(4\pi/\lambda)$. Соответствующий импеданс зазора можно сразу же найти по фиг. 11. На границе воздух—материал импеданс не изменяется, однако волновой импеданс изменяется скачком в $\sqrt{k/h}$ раз. Это означает, что в такое же число раз увеличиваются круги на фиг. 11. Следовательно, фазо-

вый угол в. материале непосредственно у границы с воздухом может быть найден по круговой диаграмме (из известного значения мнимого импеданса) в масштабе, увеличенном в $\sqrt{k/h}$ раз, или, разделив импеданс на $\sqrt{k/h}$, можно определить фазовый угол по первоначальной диаграмме. Этот путь приводит к тому же результату, но значительно более удобен. При переходе к внешней границе поглощающего слоя фазовый угол увеличивается еще на величину, равную $d(4\pi/\lambda')$, где λ' — длина волны в материале. При резонансе полный фазовый угол должен равняться $(2n+1)\pi$. Как мы видим, фиг. 11 использовалась лишь для



Фиг. 66. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для слоя акустической штукатурки толщиной 21 *мм* с воздушным зазором ($\delta_{\text{стат.}} = 31\,000$ МКС).

Цифры около кривых указывают толщину зазора.

наглядности рассуждений. Все результаты могут быть представлены в чисто математическом виде.

Связь между мнимым импедансом z и соответствующим значением Δ, определяемая из фиг. 10, имеет вид

$$z = jW \operatorname{ctg} \frac{\Delta}{2}.$$

Из условия непрерывности импеданса на границе поглощающий слой — воздух со стороны зазора

$$W \operatorname{ctg} \frac{\Delta_{\text{материал}}}{2} = W_0 \operatorname{ctg} \frac{\Delta_{\text{воздух}}}{2}$$

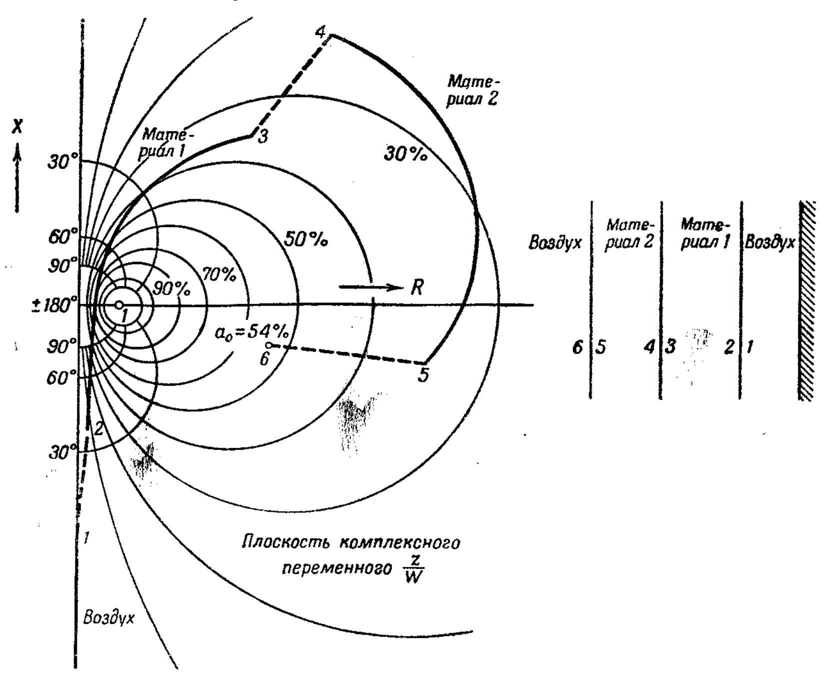
находим $\Delta_{\text{материал}}$, поскольку остальные величины известны. Прибавляя еще $d(4\pi/\lambda')$ и полагая результирующее значение Δ

равным $(2n+1)\pi$, получаем трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{\omega l}{c_0}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega d\sqrt{k}}{c_0}=\frac{h}{\sqrt{k}},$$

из которого и определяются резонансные частоты [35].

Иногда оказывают большое влияние даже тонкие слои воздуха (фиг. 66); неучетом этого обстоятельства часто и объясняются расхождения между результатами.



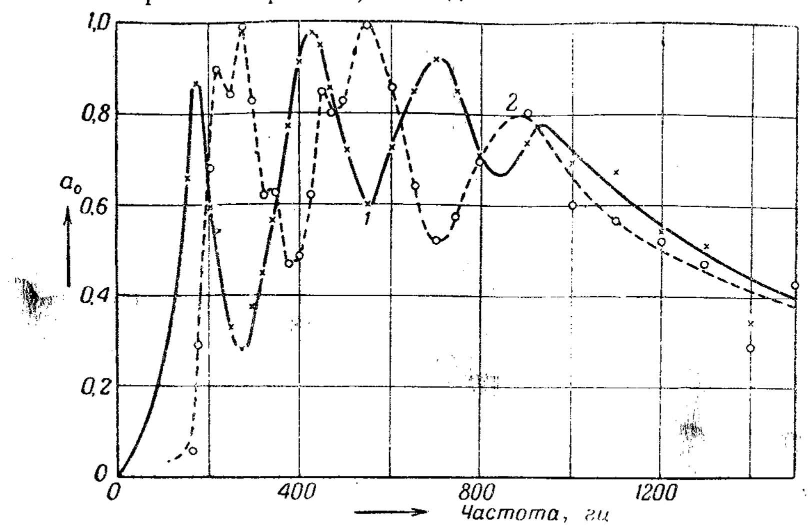
Фиг. 67. Графический способ построения импеданса для многослойной системы.

При нахождении импеданса в случае, когда затуханием нельзя пренебрегать [46], удобно пользоваться комбинацией графического и аналитического методов. Поясним это на примере двухслойной системы, за которой находится слой воздуха (фиг. 67). Импедансный контур строится в плоскости комплексного переменного z/W, поэтому надо иметь в виду, что W меняется при переходе от одного слоя к другому. Значение z/W_0 в плоскости z/W для точки *1* (см. фиг. 67, справа) определяется сразу же, при учете, что в этой точке фаза равна $l\,(4\pi/\lambda_0)$. При переходе от точки *1* к точке *2*, W испытывает скачок, что на диаграмме в плоскости переменного z/W соответствует скачку *1 — 2*.

Так как W в поглощающих материалах, вообще говоря, комплексно, то координата точки 2 в плоскости z/W имеет и вещественную составляющую. От точки 2 до точки 3 импедансный контур представляет собой участок спирали; координаты этих точек связаны соотношением:

$$r_3 = r_2 e^{-2\gamma_{\text{материал 1}} l_{\text{материал 1}}}.$$

Скачок от точки 3 к точке 4 в плоскости переменного z/W соответствует скачку W на границе 3—4 (граница между первым и вторым материалом) и т. д.

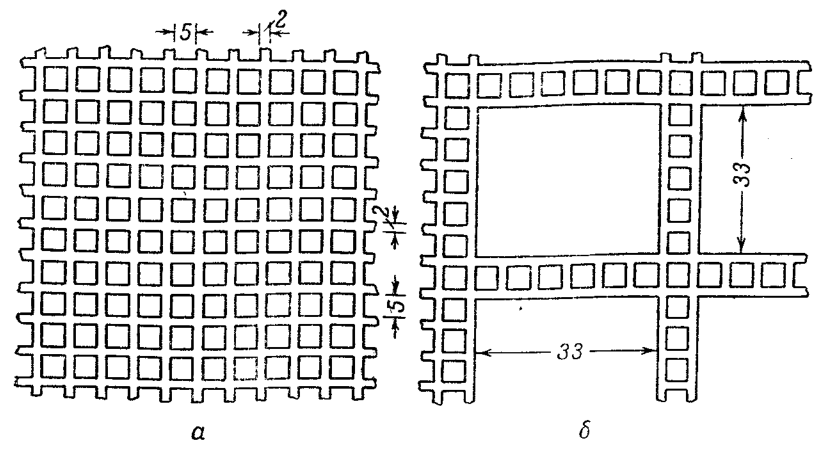


Фиг. 68. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для покрытого образца пористой резины толщиной 78 *мм* при наличии воздушного зазора между стенкой:

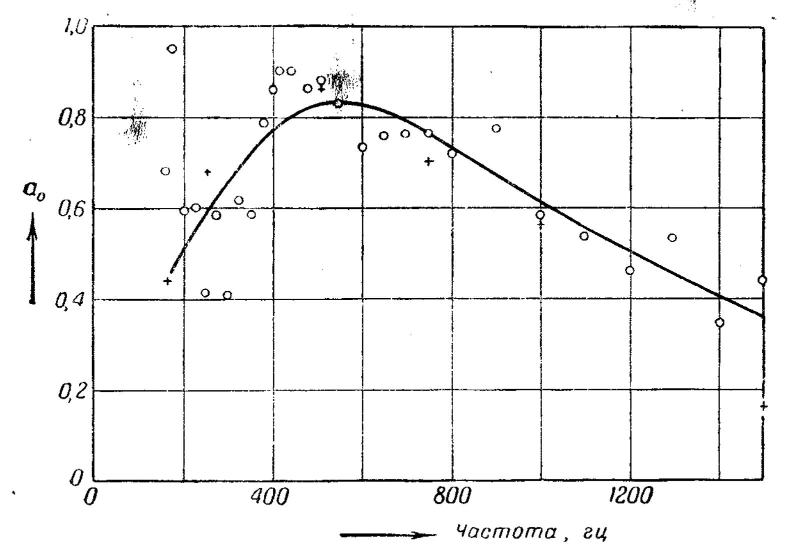
1—для свободно подвешенного образца; 2—для образца, опирающегося на железную сетку (см. фиг. 69, *а*).

Были проведены опыты с образцом специальной пористой резины латисел с покрытой поверхностью, расположенным над слоем воздуха. Для обеспечения свободного прохода вытекающему воздуху образец был часто перфорирован. На фиг. 68 кривая 1 относится к свободно подвешенному образцу. Чтобы иметь условия, близкие к практическим, образец затем укреплялся на железной сетке, показанной на фиг. 69, *а*; этому случаю на фиг. 68 соответствует кривая 2. Резонансные частоты, как видно, смещены, что объясняется влиянием сетки (задняя сторона слоя теперь не свободна, а закреплена). Чтобы ликвидировать селективное поглощение, этот же самый образец придерживался сеткой, показанной на фиг. 69, *б*; полученная с этим образцом кривая изображена на фиг. 70.

Вследствие неоднородностей образца и влияния поддерживающей сетки резонансные частоты в этом случае не выделяются;



Фиг. 69. Железные сетки для подвески образцов пористой резины на заданном расстоянии от стенки.

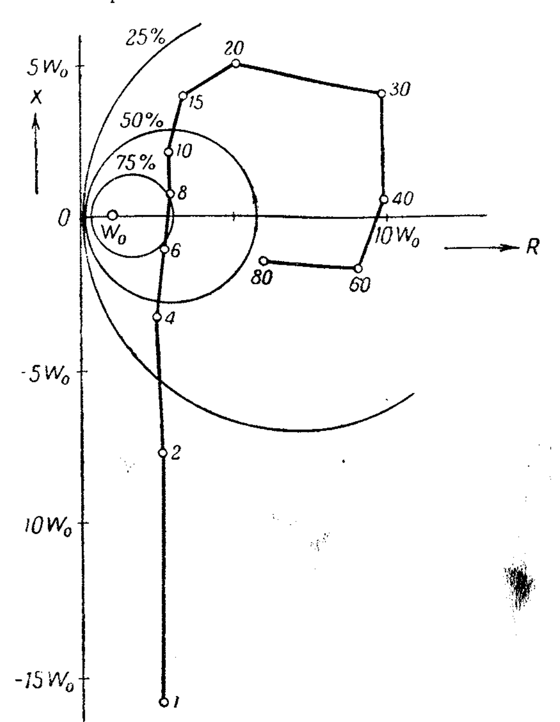


Фиг. 70. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для покрытого образца пористой резины толщиной 78 *мм* при наличии железной сетки, изображенной на фиг. 69, *б*.

экспериментальные точки указывают на наличие очень сложного спектра поглощения. Однако среднее значение коэффициента поглощения вполне удовлетворительно.

§ 8. ЦЕЛОТЕКС С-4

Акустические свойства целотекса С-4 заслуживают специального рассмотрения. Импедансный контур для этого материала [27] изображен на фиг. 71.

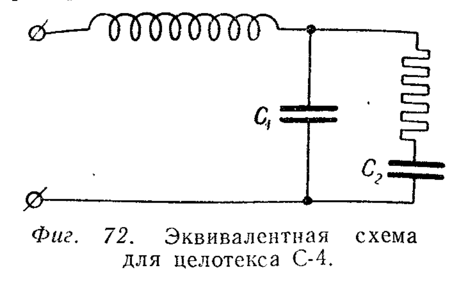


Фиг. 71. Импедансный контур для целотекса С-4. Указаны частоты в сотнях герц.

Морз и др. показали, что кривая такого вида не объясняется теорией однородных пористых сред. При этом пришлось бы допустить быстрое уменьшение структурного фактора с возрастанием частоты. Впрочем, это не должно представляться неожиданным, если вспомнить, как влияют на структурный фактор боковые поры.

Звук проходит в основном в отверстия диаметром 6 *мм*, распределенные в виде правильной сетки по всему материалу. Остальная часть материала состоит из волокон и мелких пор. Не весь воздух, содержащийся в этой пористой среде, принимает участие в движении одинаковым образом. Воздух, находящийся в порах, расположенных сбоку от основных отверстий, при высоких частотах в основном остается в покое. На фиг. 72

изображена соответственная электрическая аналогия. Весь материал должен рассматриваться как длинная электрическая линия с распределенной самоиндукцией (масса в главных отверстиях), распределенной емкостью (податливость в главных отверстиях) и с распределенными, последовательно соединенными емкостями и сопротивлениями (податливость боковых пор с входным сопротивлением). Отношение C_2/C_1 эквивалентно структурному фактору главных отверстий, т. е. полному воздушному объему, деленному на воздушный объем в главных отверстиях, и равно примерно 15—20. Эти данные хорошо согласуются с опытом.



Фиг. 72. Эквивалентная схема для целотекса С-4.

Для того чтобы получить согласие с опытной кривой, полученной Морзом и другими, нужно принять $k=38$ при 200 *гц* и $k=12$ при 2000 *гц*. Вычисления по резонансным частотам дают $k=16$ при 700 *гц* и $k=2{,}5$ при 3500 *гц*. Таким образом, расчеты показывают, что приведенная на фиг. 72 электрическая аналогия действительно приводит к согласию с опытом.

Глава VII

РЕЗОНАНСНЫЕ ЗВУКОПОГЛОТИТЕЛИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая глава посвящена вопросу поглощения звука резонаторами типа Гельмгольца. Этой теме посвящено большое число работ [4, 36, 47—58]. Несмотря на это, существует целый ряд неясностей, особенно в случае одного резонатора. Это тем более удивительно, что в основном вопрос был разработан еще Рэлеем. Поэтому нам представляется целесообразным более подробное его рассмотрение. Теория резонаторов позволяет также охватить случай перфорированного экрана, расположенного перед твердой стенкой. Этот случай, более важный и в то же время более простой, чем случай одного резонатора, рассмотрен кратко в работах Вилмса [51] и Иордана [52]. Однако создание соответствующих конструкций для любого частного случая пока является сложной задачей. Ниже будут приведены графики, упрощающие эту задачу.

Резонатор представляет собой сосуд объема V, внутренность которого сообщается с внешней средой через канал (горлышко), длина и форма поперечного сечения которого могут быть произвольными. Если у входа канала создается звуковое давление от какого-либо внешнего источника звука, то в канале возникнут колебания воздуха, от чего воздух в полости резонатора будет испытывать сжатия и разряжения наподобие пружины. Кинетическая энергия резонатора в основном определяется массой воздуха в канале, а потенциальная энергия — воздухом в полости резонатора. Вся система аналогична массе m, подвешенной на пружине с податливостью C (смещение, деленное на силу).

Роль массы играет масса воздуха в канале, роль пружины — воздух в полости резонатора.

Воздух в канале колеблется приблизительно с одинаковой скоростью по всей длине канала. Если длина канала l, поперечное сечение S, то масса m будет равна

$$m = \rho_0 l S.$$

Далее, податливость C по определению равна

$$C = \frac{dx}{dF},$$

где dx — малое смещение воздуха в канале, обусловленное силой dF. Очевидно,

$$dx = -\frac{dV}{S}, \quad dF = S dp, \quad K_0 = -\frac{V dp}{dV},$$

где dV — объем воздуха, поступающего при сжатии в полость, dp — избыточное давление, приблизительно одинаковое по всей полости, K_0 — модуль сжатия воздуха. Следовательно,

$$C = \frac{1}{S^2} \frac{V}{K_0}.$$

Собственная частота резонатора, определяемая по известной формуле $\omega_{рез.} = 1/\sqrt{mC}$, будет

$$2\pi\nu_{рез.} = \omega_{рез.} = c_0 \sqrt{\frac{G}{V}}, \tag{7.1}$$

где $G = S/l$ и $c_0 = \sqrt{K_0/\rho_0}$ — скорость звука в воздухе.

Горло резонатора редко бывает такой простой формы, чтобы его можно было принять за цилиндр определенной длины. Но даже в том случае, когда это возможно, наша теория является приближенной, так как в ней не учитывается кинетическая энергия колебаний воздуха, прилегающего к обоим концам канала. Эффективную массу воздуха, соответствующую этим колебаниям, можно учесть, прибавив к длине канала l некоторую поправку. Для каналов с круглым поперечным сечением полная поправка для обоих концов составляет 0,8 диаметра D. Если l стремится к нулю, т. е. канал вырождается в отверстие в тонкой стенке, то масса определяется исключительно поправками на открытые концы, причем G точно равно D (подробности см. у Рэлея [4]).

Зависимость резонансной частоты $\nu_{рез.}$ от проводимости G и объема V, определяемая уравнением (7.1), графически изображена на фиг. 73. Поскольку для отверстия в тонкой стенке $G \approx D$, то там указаны и значения D. Стенку можно считать тонкой, если ее толщина много меньше диаметра отверстия.

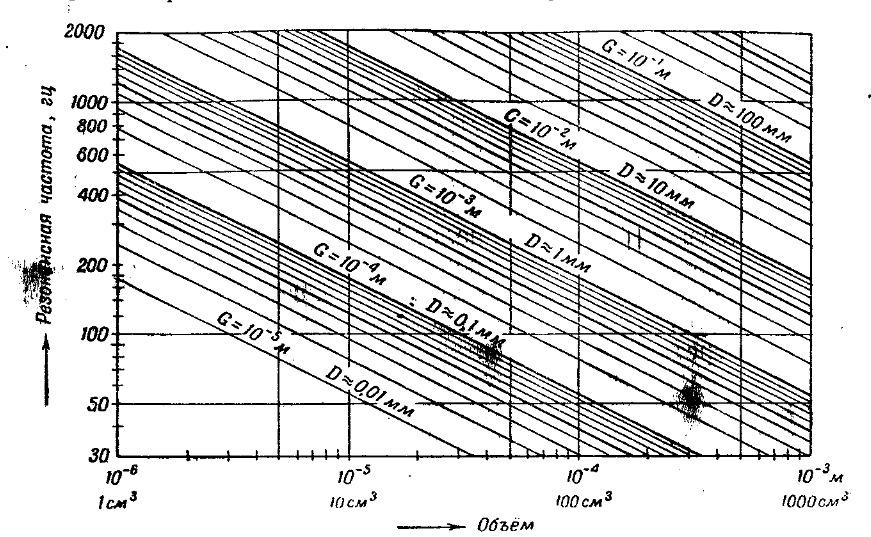
Очевидно $G = S/l$ является электрической проводимостью проводника той же самой формы, что и канал, если удельная проводимость принята за единицу. Эта аналогия справедлива [4] и в более сложных случаях, что помогает оценивать G. Если в сосуде имеется несколько отверстий на достаточно больших расстояниях друг от друга, то проводимости отверстий G просто складываются. Если в тонком сосуде имеется четыре отверстия диаметром D, то полная проводимость $G = 4D$. Если же отверстия расположены очень близко друг к другу, то потоки воздуха в них будут взаимодействовать друг с другом и поправки на открытые концы будут иными. При этом проводимость каждого

отверстия уменьшится. Однако проводимость четырех отверстий не может быть меньше $2D$, т. е. диаметра отверстия, получающегося при слиянии четырех отдельных отверстий.

Как уже было указано выше, для цилиндрических каналов приблизительно круглого поперечного сечения имеем

$$G = \frac{S}{l + 0{,}8D}. \tag{7.2}$$

Проводимость может быть также вычислена в случае, когда отверстие представляет собой щель шириной b в бесконечной



Фиг. 73. Зависимость резонансной частоты резонатора от объема V при различных проводимостях G.

Для круглых отверстий в тонких экранах G равно диаметру отверстия (для толстых экранов см. фиг. 83).

стенке толщиной d [55, 59, 60]. Для единицы длины щели имеем:

$$\frac{1}{G} = \frac{d}{b} + 0{,}7 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2c_0}{\omega b}. \tag{7.3}$$

Даже при учете концевых поправок изложенная здесь теория резонатора остается приближенной. Строго говоря, кинетическая энергия не сосредоточена только в канале. Точно так же при расчете упругости и соответствующей ей потенциальной энергии нельзя ограничиваться лишь объемом полости. Приведенные выше формулы приближенно справедливы, если все размеры резонатора малы по сравнению с длиной волны. Более детально эти вопросы рассмотрены в статье Ингорда [61].

Чтобы избежать резкого селективного поглощения в узкой полосе частот вблизи резонанса, необходимо создать в резонаторе подходящее затухание. Если это затухание создается путем заполнения полости резонатора каким-либо пористым материалом, то надо иметь в виду, что при этом изменяются эффективный объем полости и проводимость. Влияние на проводимость определяется структурой пористого материала. Для поправки на внутреннем конце канала существенно, что воздух может проходить только через главные поры, т. е. через часть объема, равную h/k, где h — пористость, k — структурный фактор (см. гл. I, § 8). Это означает, что эффективная плотность воздуха *может* оказаться в 5—10 раз больше ее нормального значения; увеличение плотности можно учесть, предположив, что поправка на открытый конец со стороны полости в такое же число раз превышает поправку, определяемую диаметром. Для тонких стенок проводимость при этом уменьшается в 3—5 раз, что приводит к понижению резонансной частоты в 1,7—2,2 раза. По сравнению с этим эффектом увеличение резонансной частоты, обусловленное сокращением воздушного объема в полости, будет мало.

В акустическом смысле резонатор выполняет три функции:

а) поглощает энергию вследствие трения в канале и вблизи него;

б) действует как вторичный источник звука благодаря излучению из отверстия и, следовательно, может быть использован для рассеяния падающего звука;

в) запасает энергию при резонансе, которую отчасти возвращает в окружающее пространство после того, как на него перестает действовать звук от внешнего источника; при некоторых условиях от этого может увеличиться время реверберации помещения, в котором расположен резонатор; этот эффект определяется временем реверберации самого резонатора, которое в свою очередь зависит от его затухания.

Ясно, что если резонатор имеет небольшое затухание, то он будет отзываться только на частоты, близкие к собственной частоте. В этом случае он будет поглощать много энергии; время реверберации его тоже будет большим. Вне резонанса он практически не будет отзываться на внешнее поле и, следовательно, не может являться хорошим поглотителем.

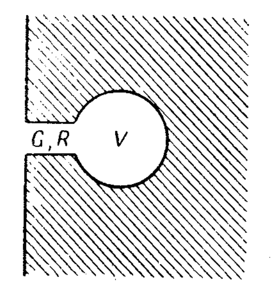
Чтобы сделать резонатор поглощающим в достаточно широком диапазоне частот, следует увеличить его затухание. Но тогда он будет менее эффективным в смысле реакции на внешнее поле и его время реверберации будет мало.

Так как нас интересует вопрос о поглощении звука, то мы должны подбирать такие конструкции, которые достаточно поглощают звук в достаточно широкой полосе частот; влиянием же на реверберацию помещения, в котором используются такие конструкции, можно пренебречь.

Перейдем теперь к расчету резонаторов. Рассмотрим три случая:
а) резонатор в безграничной стенке;
б) перфорированные экраны перед жесткой стенкой;
в) случай нескольких резонаторов.

§ 2. РЕЗОНАТОР В БЕЗГРАНИЧНОЙ СТЕНКЕ

Пусть на безграничную стенку, в которой имеется один резонатор, нормально падает плоская волна. Пусть G — проводимость резонатора, V — его объем, а R — сопротивление (фиг. 74). Последнее является мерой затухания резонатора и будет определено ниже.



Фиг. 74. Единичный резонатор.

Поглощение и рассеяние звука резонатором полностью описываются его импедансом Z, зависящим от частоты. Импеданс Z определяется как отношение звукового давления p к объемной скорости v; его можно выразить через G, R и V:

$$Z = \frac{j\omega\rho_0}{G} + R + \frac{\varkappa p_0}{j\omega V}. \qquad (7.4)$$

Это уравнение выражает тот факт, что часть внешнего давления идет на преодоление инерции и сопротивления трения находящегося в канале воздуха; остальная же часть идет на адиабатическое сжатие воздуха в полости. В электрических аналогиях такая система соответствует последовательному соединению элементов цепи. Для цилиндрического канала слагаемое, обусловленное инерцией (без поправок на концы), равно $j\omega\rho_0 l/S$. Согласно Рэлею, оно может быть представлено в общем виде $j\omega\rho_0/G$ для случая, когда канал не цилиндрической формы и когда учтены поправки на открытые концы. Так как p включает в себя влияние инерции воздуха перед резонатором, то оно не является давлением точно у входа в канал, но представляет собой давление перед резонатором на некотором расстоянии от входа, например на расстоянии, равном диаметру канала (точка A на фиг. 74). Слагаемое, обусловленное упругостью, вытекает из определения модуля сжатия, который равен $\varkappa p_0$; $j\omega$ появляется при дифференцировании смещения по времени (электрический аналог $1/j\omega C$).

Величина R, очевидно, представляет собой составляющую звукового давления p в точке A, находящуюся в фазе со скоростью v и деленную на эту скорость.

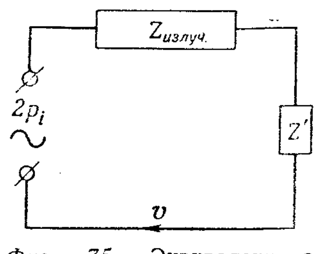
Если в точке A амплитуда звукового давления равна $\hat{p}$, а объемной скорости равна $\hat{v}$, то поглощаемая мощность будет $^1/_2\,\hat{v}^2 R$,

аналогично выражению $I^2R = {}^1/_2\hat{i}\,{}^2R$ в электродинамике; $\hat{v}$ может быть вычислено через $\hat{p}$ по формуле

$$\hat{p} = |Z|\,\hat{v},$$

так что нужно знать только значение $\hat{p}$, чтобы найти поглощаемую мощность.

В вопросе о давлении часто возникают недоразумения. Когда на стенку падает плоская волна с амплитудой $\hat{p}_i$, то давление в точке A не будет равно ни $2\hat{p}_i$, как вблизи твердой стенки, ни $\hat{p}_i$, как считают некоторые авторы, а будет зависеть от сопротивления излучения отверстия. Чтобы найти это звуковое давление, представим себе безинерционный поршень, который может без трения перемещаться в канале. Под действием внешней силы этот поршень будет перемещаться с объемной скоростью v. При наличии падающей плоской волны давление с внешней стороны поршня равно сумме $2p_i - Z_{\text{изл.}}v$, где первое слагаемое обусловлено падающей волной, а второе — излучением; $Z_{\text{изл.}}$ есть сопротивление излучения поршня. Давление с внутренней стороны, очевидно, равно $Z'v$, где Z' равно Z минус сопротивление, обусловленное внешней по отношению к поршню массой в канале и равное $j\omega\rho_0\Delta l_{\text{внешн.}}/S$. Следовательно, условие равенства давления с обеих сторон поршня запишется в виде:



Фиг. 75. Эквивалентная схема для резонатора.

$$2p_i - Z_{\text{изл.}}v = Z'v. \tag{7.5}$$

Знак минус перед вторым членом в левой части обусловлен тем, что за положительное направление скорости взято направление от внешнего конца канала к внутреннему. При v, удовлетворяющем этому уравнению, не требуется никакой внешней силы для поддержания движения поршня; поэтому в первом приближении мы ничего не изменим, если уберем этот поршень. Следовательно, уравнение (7.5), связывающее скорость v и давление падающей волны, справедливо для резонатора без поршня. На фиг. 75 показана соответственная электрическая схема. К двум последовательно соединенным сопротивлениям $Z_{\text{изл.}}$ и Z' приложена э.д.с. $2p_i$. Сюда приложима известная теорема из теории электричества: ток в любом участке электрической цепи равен току, который проходил бы по этому участку, если бы он был присоединен к зажимам источника тока с э.д.с., равной напряжению на концах данного участка цепи при бесконечном сопротивлении этого

участка, а внутреннее сопротивление источника тока равнялось бы сопротивлению всей цепи за исключением сопротивления данного участка, при условии, что из этой остальной части цепи удалены все э. д. с.

Акустической э. д. с. в нашем случае является давление при $Z' = \infty$, т. е. $2p_i$. Внутренним сопротивлением является, очевидно, импеданс излучения, так как он определяется из условия, что резонатор удален и падающая волна «заморожена».

Из фиг. 75 видно, что

$$v = \frac{2p_i}{Z_{\text{изл.}} + Z'};$$

тогда для поглощаемой мощности получаем

$$\frac{1}{2}\left|\frac{2p_i}{Z_{\text{изл.}} + Z'}\right|^2 \operatorname{Re} Z',$$

где Re означает вещественную часть.

Резонатор как поглотитель характеризуется величиной A, представляющей собой отношение поглощаемой мощности к потоку энергии в падающей волне, равному

$$\frac{1}{2}\frac{|p_i|^2}{W_0},$$

т. е.

$$A = \frac{4W_0 \operatorname{Re} Z'}{|Z_{\text{изл.}} + Z'|^2}. \tag{7.6}$$

Из определения A следует, что эта величина имеет размерность площади. Мы будем измерять ее в квадратных метрах.

$Z_{\text{изл.}}$ состоит из мнимой части, обусловленной поправкой на внешний конец канала, которая в сумме с Z' дает Z, и из вещественной части, которая называется сопротивлением излучения. Если поперечное сечение резонатора много меньше длины волны, то вещественная часть $Z_{\text{изл.}}$ выразится следующим образом [4]:

$$\operatorname{Re} Z_{\text{изл.}} = \frac{2\pi W_0}{\lambda^2} = R_{\text{изл.}}. \tag{7.7}$$

Из уравнения (7.6) видно, что Z' можно заменить на Z, если не учитывать мнимой части $Z_{\text{изл.}}$.

Величина A будет иметь максимум вблизи резонанса, т. е. когда Z вещественно (и равно R). Максимальное поглощение при заданной частоте ($\lambda = \text{const}$), очевидно, имеет место при $R = R_{\text{изл.}}$, и тогда

$$A_{\text{макс.}} = \frac{\lambda^2_{\text{рез.}}}{2\pi}. \tag{7.8}$$

Так, при частоте 345 *гц* ($\lambda = 1$ *м*) имеем $A \approx 1/6$ *м*^{2}.

Оценим теперь величину звуковой энергии, рассеиваемой резонатором во все стороны [4].

Очевидно, заменив в уравнении (7.6) Z' на $Z_{изл.}$ и обратно, получим полную мощность, излучаемую резонатором во всех направлениях по отношению к потоку энергии падающей волны. Уравнение (7.8) дает полную рассеянную мощность, если $R = R_{изл.}$ и резонатор настроен в резонанс. Максимальная рассеиваемая мощность, однако, в 4 раза больше. Это можно показать, сделав перестановку Z' и $Z_{изл.}$ в (7.6) и рассмотрев случай резонанса при $R=0$.

Уравнение (7.8) может оказаться очень полезным, однако следует помнить, что, вообще говоря, желательно, чтобы поглощение имело место в довольно широком диапазоне частот, по крайней мере в пределах двух октав. Если резонатор имеет настолько малое затухание, что справедливо (7.8), то он поглощает очень селективно и вне резонанса поглощение очень мало. Следовательно, для оценки эффективности резонатора необходимо рассмотреть поглощение вне резонанса. Для этого снова оказывается удобным (7.6).

Введем следующие обозначения:

$$f = \frac{\text{Частота}}{\text{Резонансная частота}} = \frac{\nu}{\nu_{рез.}},$$

$$\mu = \frac{\text{Сопротивление резонатора}}{\text{Сопротивление излучения при резонансе}} = \frac{R\lambda^2_{рез.}}{2\pi W_0} \quad [\text{см. } (7.7)],$$

$$g = \frac{G}{\lambda_{рез.}},$$

Можно показать, что в этих обозначениях (7.6) записывается в виде

$$A = \frac{\lambda^2_{рез.}}{2\pi} \frac{4\mu}{(f^2+\mu)^2 + \left(f - \frac{1}{f}\right)^2 \frac{1}{g^2}}. \qquad (7.9)$$

При резонансе ($f=1$) имеем

$$A = \frac{\lambda^2_{рез.}}{2\pi} \frac{4\mu}{(1+\mu)^2}, \qquad (7.10)$$

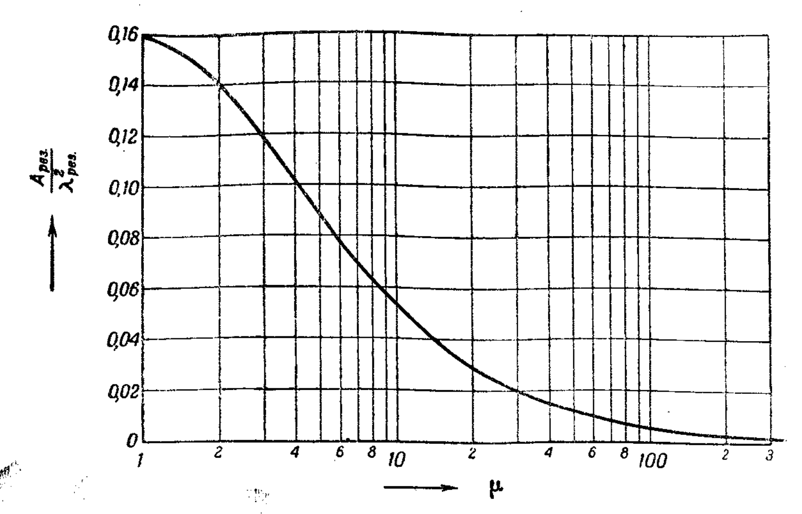
что совпадает с (7.8), если $\mu = 1$.

Вне резонанса ($f \neq 1$) A будет меньше $A_{рез.}$.

При

$$(f^2+\mu)^2 + \frac{\left(f - \frac{1}{f}\right)^2}{g^2} = 2(1+\mu)^2 \qquad (7.11)$$

$A = \frac{1}{2} A_{рез.}$. Решая (7.11), найдем две частоты f_1 и f_2; число октав O, заключенное между f_1 и f_2, может служить мерой ширины резонансной кривой.



Фиг. 76. Зависимость $A_{рез.}$ (эквивалентной площади открытого окна в $м^2$), деленной на квадрат длины волны, от отношения внутреннего сопротивления к сопротивлению излучения.

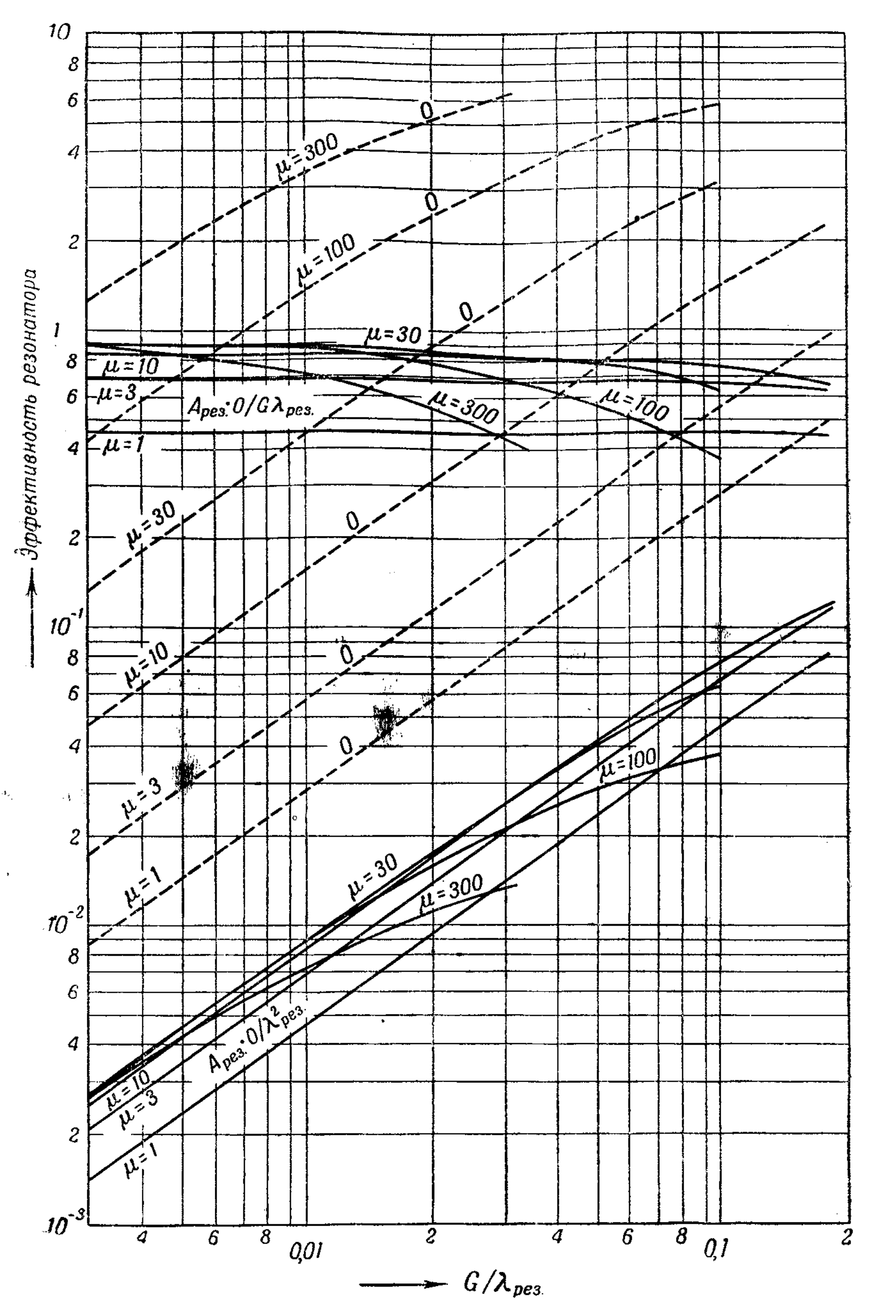
Эффективность резонатора могут характеризовать следующие величины:

$\frac{A_{рез.}}{\lambda^2_{рез.}}$ — функция только μ, имеющая максимум при $\mu = 1$ (см. фиг. 76, часть кривой для $\mu < 1$ не показана).

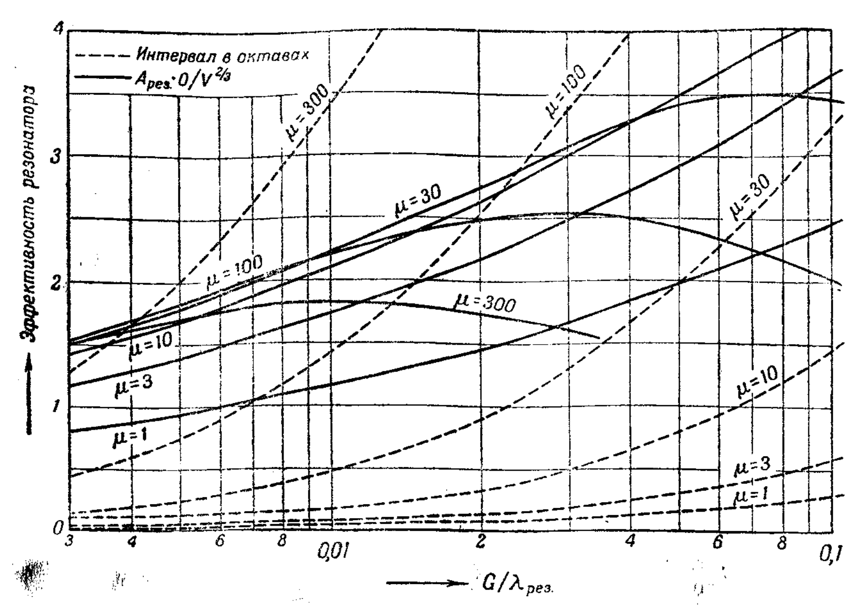
O — число октав между частотами, при которых поглощение равно $\frac{1}{2} A_{рез.}$ (см. фиг. 77 и 78, пунктирные линии); O есть функция только μ и g.

$\frac{A_{рез.} O}{\lambda^2_{рез.}}$ — функция μ и g, возрастающая с возрастанием g (см. фиг. 77, нижняя часть). Эта величина дает представление о полном эффекте резонатора.

$\frac{A_{рез.} O}{G^2}$ — функция μ и g. Так как G^2 приближенно совпадает с площадью поперечного сечения канала (для тонких стенок $G = D$), то $\frac{A_{рез.} O}{G^2}$ дает поглощаемую энергию, отнесенную к площади отверстия. График этой величины не приводится; с уменьшением проводимости (диаметра отверстия) она возрастает.



Фиг. 77. Зависимость параметров, характеризующих эффективность отдельного резонатора, от внутреннего сопротивления и проводимости G.



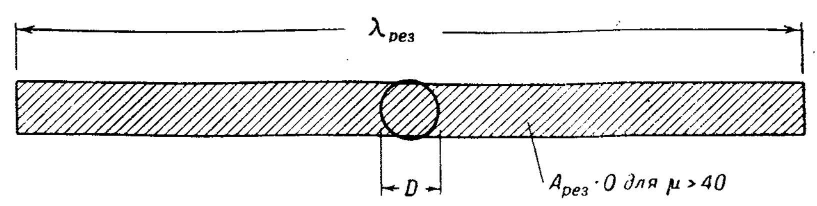
Фиг. 78. «Экономия стенки» и селективность конструкции с одним резонатором в зависимости от проводимости G и внутреннего сопротивления μ, выраженного в относительных единицах.

$\frac{A_{рез.}O}{\lambda_{рез.}G}$ — функция μ и g; при малых значениях μ и (или) g становится функцией только μ (см. пологие кривые вверху фиг. 77); эта функция, так же как и предыдущие две, является мерой поглощаемой энергии, выраженной в единицах площади поверхности «открытого окна», умноженной на число октав, где имеет место поглощение, и отнесенной к площади $A_{рез.}G$. Рассматриваемая функция при подходящем μ и не слишком большом g приблизительно равна 1, что хорошо видно из фиг. 79. Вообще фиг. 79 весьма полезна при всякого рода оценках. Полезно отметить, что величина $\frac{A_{рез.}O}{\lambda_{рез.}G}$ пропорциональна величине $\frac{A_{рез.}O\lambda_{рез.}}{V}$, т. е. отношению произведения $A_{рез.}O$, характеризующего эффективность резонатора, к объему резонатора, и поэтому может служить мерой эффективности резонатора с «экономической» точки зрения. Поскольку величина $\frac{A_{рез.}O}{\lambda_{рез.}G}$ близка к единице, то отсюда следует, что *все резонаторы с «экономической» точки зрения*

примерно равноценны (при наивыгоднейшем μ и малом g).

$\frac{A_{\text{рез.}}O}{V^{2/3}}$ — величина, являющаяся также функцией μ и g, позволяет дать оценку эффективности резонатора по отношению к площади стены, приходящейся на резонатор. Графически эта величина представлена на фиг. 78.

Из фиг. 78 видно, что при поглощении резонатором в интервале одной октавы или более хорошее использование стенки достигается при μ, равном от 10 до 30, причем $G/\lambda_{\text{рез.}}$ не должно быть менее 0,04.



Фиг. 79. Поглощающая поверхность при резонансе $A_{\text{рез.}}$, умноженная на число октав O, для которых поглощающая поверхность превосходит $A_{\text{рез.}}/2$, приблизительно равна произведению $G\lambda_{\text{рез.}}$ при подходящих μ и g. Для круглого отверстия в тонком экране $G \approx D$.

При малых значениях $G/\lambda_{\text{рез.}}$ все кривые на фиг. 77 превращаются в прямые линии. Аналитические выражения для них могут быть легко получены при учете (7.11), если предположить, что f приблизительно равно 1, а g много меньше единицы. Тогда для введенных пяти величин получаем:

$$\left.\begin{aligned} O &= 1,442\,(1+\mu)\,g, \\ \frac{A_{\text{рез.}}O}{\lambda^2_{\text{рез.}}} &= 0,918\,\frac{\mu g}{(1+\mu)}, \\ \frac{A_{\text{рез.}}O}{G^2} &= 0,918\,\frac{\mu}{g\,(1+\mu)}, \\ \frac{A_{\text{рез.}}O}{\lambda_{\text{рез.}}G} &= 0,918\,\frac{\mu}{(1+\mu)}, \\ \frac{A_{\text{рез.}}O}{V^{2/3}} &= 10,64\,\frac{\mu\sqrt[3]{g}}{(1+\mu)}. \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Здесь $1,442 = \frac{1}{\ln 2}$ и $0,918 = \frac{2}{\pi \ln 2}$.

Эти формулы справедливы с достаточной степенью точности в диапазоне вплоть до одной октавы.

§ 3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ С ОДНИМ РЕЗОНАТОРОМ

Рассмотрим пример практического использования результатов предыдущего параграфа. Пусть имеется помещение объемом 1000 $м^3$ с кирпичными стенами и несколькими окнами. Помещение рассчитано на 20 человек. Поверхность стен, пола и потолка около 600 $м^2$; средний коэффициент поглощения равен примерно 5%. Оптимальный коэффициент поглощения, вычисленный по формуле Сэбина (обеспечивающий, скажем, время реверберации 1 сек.), равен 28%, так что необходимо обеспечить дополнительное поглощение 23%. Для наибольшей дешевизны будем стремиться к поглощению лишь наиболее мешающих частот — 150 — 600 *гц*. Попытаемся решить задачу при помощи резонатора одного типа. Выберем резонансную частоту 300 *гц*; число октав 2. Находим:

$$\lambda_{рез.} = \frac{340}{300} = 1,1 \ м;$$

$G = 3$ *см* (велико, но допустимо);

$\frac{G}{\lambda_{рез.}} = 0,027$ (хорошее использование стенки, см. фиг. 78);

$\mu \approx 50$ (см. фиг. 77 или 78 для 2 октав);

$\frac{A_{рез.}O}{\lambda^2_{рез.}} = 0,0215$ (см. фиг. 77 для $g = 0,027$, $\mu = 50$);

$$A_{рез.} = 0,0215 \cdot \frac{1,1^2}{2} = 0,013 \ м^2;$$

число резонаторов, приходящихся на 1 $м^2$, равно $\frac{23}{1,3} = 17,7$;

$V \approx 1000$ $см^2$ [см. уравнение (7.1) или фиг. 73].

Допустимо уменьшение числа резонаторов. Действительно, теория предыдущего параграфа применима к нормальному падению, тогда как на практике падение бывает более или менее диффузным. Акустическая «э.д.с.», равная $2p_i$, не зависит от угла падения θ. Следовательно, поглощаемая мощность также не зависит от θ, в то время как коэффициент поглощения стены пропорционален $1/\cos\theta$. При $\theta = 60°$ коэффициент поглощения удваивается, а при θ, стремящемся к 90°, коэффициент поглощения неограниченно возрастает. Даже усреднение по телесному углу [см. (8.3)] дает бесконечную величину. Поэтому мы предполагаем, что практически коэффициент поглощения будет по крайней мере в 2 раза больше вычисленного согласно § 2.

Благоприятным обстоятельством является также и то, что импедансный контур резонатора в комплексной плоскости не представляет собой строго вертикальной линии, как это предполагается в (7.4). Эта линия иногда искривляется, причем сопро-

тивление имеет минимум около резонанса. Это означает, что резонансные кривые должны быть более широкие, чем следует из § 2.

Можно думать, что в вышеприведенном случае достаточно взять в среднем 8 резонаторов на 1 *м*². Конечно, имеются поверхности, на которых неудобно размещать резонаторы (двери, окна, пол), поэтому число резонаторов на каждый квадратный метр остальной поверхности должно соответственно увеличиться.

Хотя приведенное в настоящем параграфе решение задачи является правильным, значение μ, равное 50, не осуществимо без измерений импеданса. Другой путь решения задачи заключается в применении того же числа резонаторов, но с различными собственными частотами. Тогда μ может быть меньшим, Это слегка увеличит также коэффициент использования стенки (см. фиг. 78). При этом можно применить резонаторы со значениями μ от 10 до 50. В этом случае эффект будет мало зависеть от величины μ.

Наконец, следует отметить, что резонатор будет действовать как поглотитель лишь в том случае, когда его время реверберации много меньше времени реверберации помещения, в котором он находится. В большинстве случаев это условие выполняется. Приведем без вывода формулу для времени реверберации:

$$\tau = 13{,}82 \frac{\rho_0}{(R_{\text{изл.}} + R)\, G} = 0{,}0064 \frac{1}{1+\mu} \frac{\lambda_{\text{рез.}}}{G/\lambda_{\text{рез.}}}.$$

Полагая, например, τ не превышающим 0,1 сек., а μ в целях экономии равным минимальному значению (10), можем подсчитать минимальную допустимую проводимость (равную приблизительно диаметру отверстия) как функцию резонансной частоты (табл. 9). При низких частотах оказывается выгоднее выбрать μ, превышающее 10.

Таблица 9

Минимальная проводимость G при различных резонансных частотах для $\tau < 0{,}1$ сек. и $\mu > 10$

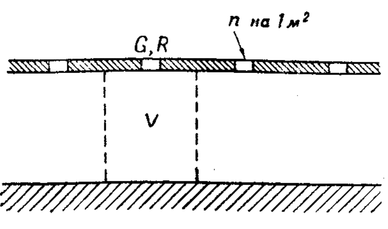
ν, *гц*	$G_{\text{мин.}}$, *м*	ν, *гц*	$G_{\text{мин.}}$, *м*
100	0,069	400	0,004
200	0,017	800	0,001

§ 4. ПЕРФОРИРОВАННЫЙ ЭКРАН ПЕРЕД ТВЕРДОЙ СТЕНКОЙ

Перейдем теперь к более важному случаю. Пусть на некотором расстоянии от твердой стенки расположен перфорированный экран. Такие конструкции можно рассматривать как системы,

состоящие из бесконечного числа резонаторов, каналы которых оканчиваются на твердой стенке. Предположим, что резонаторы распределены по поверхности некоторым регулярным образом и число их на 1 $м^2$ равно n. Этот случай более важен, чем случай одного резонатора, так как конструкции с бо́льшим числом резонаторов такого типа, поглощающие звук в широком диапазоне частот, могут быть выполнены без больших затрат. Такие поглотители нашли широкое применение. Обычно между экранами и стенкой прокладывается какой-либо пористый материал (например, стеклоткань).

Предположим, что воздушное сопротивление сосредоточено в каналах, т. е. вблизи перфораций. Можно думать, что полученные для этого случая теоретические результаты применимы и к практическим конструкциям, в которых все пространство между стенкой и перфорированным экраном заполнено пористым материалом.



Фиг. 80. Величины, характеризующие перфорированный экран.

Действительно, потери на трение будут наибольшими там, где скорость наибольшая, т. е. вблизи перфораций. Вдали от перфорации воздух, в сущности, находится в покое и действует как пружина. Наличие этой части пористого материала приводит лишь к уменьшению содержания воздуха и, следовательно, к небольшому увеличению резонансной частоты. Ниже будет показано, что опытные данные находятся в очень хорошем согласии с теоретическими формулами, полученными на основе предположения о сосредоточенном сопротивлении.

В теории будут фигурировать следующие величины (фиг. 80):

V — объем, приходящийся на одну перфорацию;

n — число перфораций на единицу поверхности;

G — проводимость одного отверстия (для длинного цилиндрического канала проводимость равна S/l);

R — воздушное сопротивление одного отверстия (отношение разности давлений к объемной скорости одного отверстия без учета инерции).

Если размер объема V и, следовательно, расстояние между отверстиями много меньше длины звуковой волны, то *удельный* акустический импеданс z можно определить как отношение давления к объемной скорости, отнесенной к 1 $м^2$. Зная z, коэффициент поглощения a_0 данной конструкции найдем по обычному уравнению

$$a_0 = 1 - \left| \frac{z - W_0}{z + W_0} \right|^2 . \quad (7.13)$$

Так как объемное смещение для 1 $м^2$ поверхности в n раз больше, чем для одного отверстия, то для z имеем

$$z=\frac{1}{n}\left[R+\frac{j\omega\rho_0}{G}+\frac{\varkappa p_0}{j\omega V}\right]. \tag{7.14}$$

Для того чтобы найти a_0, надо подставить (7.14) в (7.13). Однако лучше воспользоваться круговой диаграммой (см. фиг. 11), по которой можно определить a_0, если известно z. При резонансе $z=R/n$, т. е. импеданс является вещественной величиной, которую при желании можно изменить путем соответствующего выбора сопротивления перфораций. Если частота меняется в небольших пределах вблизи резонансной частоты, то сопротивление R можно считать постоянным; импедансный контур в этом случае будет параллелен мнимой оси. Частотная шкала вдоль этого контура зависит только от n, G и V [см. мнимую часть z в (7.14)] и не зависит от R. Из фиг. 11 сразу видно, что если для данной конструкции R возрастает (n, G и V постоянные), то интервал поглощаемых частот увеличивается. Но в то же время с увеличением R коэффициент поглощения при резонансе уменьшается. Следовательно, с увеличением R уменьшается селективность (что в большинстве случаев очень полезно), но уменьшается также и максимум коэффициента поглощения (что в большинстве случаев невыгодно). Таким образом, задача сводится к тому, чтобы в каждом отдельном случае подобрать некоторое оптимальное значение сопротивления.

Величиной, характеризующей селективность поглощения конструкции, является ширина полосы частот, в которой коэффициент поглощения превосходит половину максимального значения (при резонансе). Полагая в (7.13) $z=r+jx$, где x — функция частоты, $a_{0_{рез.}}$ найдем, полагая $x=0$. Значение величины x, при котором a_0 равно $^1/_2\, a_{0_{рез.}}$, находится из формулы (7.13) и оказывается равным

$$x=\pm(r+W_0). \tag{7.15}$$

Зависимость этого критического значения x от r может быть изображена графически в комплексной плоскости в виде двух линий, имеющих наклон 45° относительно горизонтальной оси и проходящих через точку $-W_0$ на фиг. 81; из рисунка видно, что селективность поглощения мала только при не очень малых значениях $r=R/n$. Если за предельные значения $a_{0_{рез.}}$, пригодные для практических целей, принять 45 и 75%, то из фиг. 11 и 81 видно, что величина R/n должна лежать в интервале между $3W_0$ и $8W_0$, т. е. между 1300 и 3500 в системе МКС.

Подставляя в (7.15) вместо x и r их значения, определяемые из (7.14), получим уравнение, из которого могут быть найдены

две критические частоты, определяющие ширину полосы поглощения. Как и в § 2, обозначим через f_1 и f_2 отношение этих частот к резонансной частоте. Эти отношения можно назвать относительными критическими частотами. Учитывая, что $\omega_{рез.} = c_0 \sqrt{G/V}$, для f_1 и f_2 получаем

$$f - \frac{1}{f} = \pm n \sqrt{GV}\left(\frac{R}{nW_0} + 1\right). \tag{7.16}$$

Это уравнение аналогично уравнению (7.11) для одного резонатора. Однако (7.16) значительно проще, так как правая часть в нем является постоянной. Это упрощение обязано тому, что импеданс излучения здесь не зависит от частоты. Одним из свойств уравнения (7.16) является то, что $f_1 f_2 = 1$, т. е. на логарифмической шкале f_1 и f_2 расположены симметрично относительно единицы.

Фиг. 81. К селективности перфорированных экранов.

Если число октав O между f_1 и f_2 мало, то, как и в § 2, имеет место ряд простых соотношений. При соответствующем выборе обозначений имеется также и аналогия в формулах.

Обозначим:

$R/nW_0 = \mu'$,

$nG = G'$ (проводимость, отнесенная к 1 $м^2$ поверхности),

$nV = V'$ (объем, отнесенный к 1 $м^2$, равный примерно объему воздушного зазора между экраном и стенкой),

$G'/\lambda_{рез.} = g'$.

Можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
a_{0_{рез.}} &= \frac{4\mu'}{(1+\mu')^2}, \\
O &= \frac{\lambda^2_{рез.}}{2} 1{,}442\,(1+\mu')\,g', \\
\frac{a_{0_{рез.}} O}{\lambda^2_{рез.}} &= 0{,}918 \frac{\mu' g'}{(1+\mu')}, \\
\frac{a_{0_{рез.}} O}{G'^2} &= 0{,}918 \frac{\mu'}{g'(1+\mu)}, \\
\frac{a_{0_{рез.}} O}{\lambda_{рез.} G'} &= 0{,}918 \frac{\mu'}{(1+\mu')}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

Эти формулы отличаются от аналогичных формул § 2 лишь тем, что множитель $^1/_2\,\lambda^2_{рез.}$ отсутствует в формуле для $a_{0рез.}$ и входит в формулу для O. Уравнения, содержащие произведение $a_{0рез.}\,O$, совпадают с соответствующими уравнениями (7.12), т. е. в этом случае также выгодны большие значения μ' и g'. Однако следует помнить, что соотношения (7.17) справедливы лишь для достаточно малых значений O; следовательно, их применимость ограничивается некоторыми максимальными значениями μ' и g'.

Если O не мало, то при проектировании надо пользоваться графиками, которые в этом случае проще, так как $a_{0рез.}$ и O являются функциями только одной независимой переменной.

Проектирование можно основывать на формулах

$$\left.\begin{aligned} a_{0рез.} &= \frac{4\mu'}{(1+\mu')^2}, \\ O &= F\,[\lambda_{рез.}G'\,(1+\mu')], \end{aligned}\right\} \qquad (7.18)$$

где F — известная функция.

При проектировании удобно придерживаться следующего порядка:

1) выбрать $a_{0рез.}$, O и $\lambda_{рез.}$;

2) найти μ' и $\lambda_{рез.}G'$ по формулам (7.18) или по графикам, построенным по ним;

3) определить R/n по μ';

4) найти $G' = nG$ и $V' = G'\lambda^2_{рез.}/4\pi^2$, т. е. зазор между экраном и стенкой, по $\lambda_{рез.}G'$ и $\lambda_{рез.}$;

5) одно и то же значение nG можно получить при большом числе малых отверстий или при малом числе больших отверстий. Приближенное практическое решение обычно получается при $nG \approx nD$, где D—диаметр отверстия.

§ 5. ПРАВИЛА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩИХ ПОКРЫТИЙ

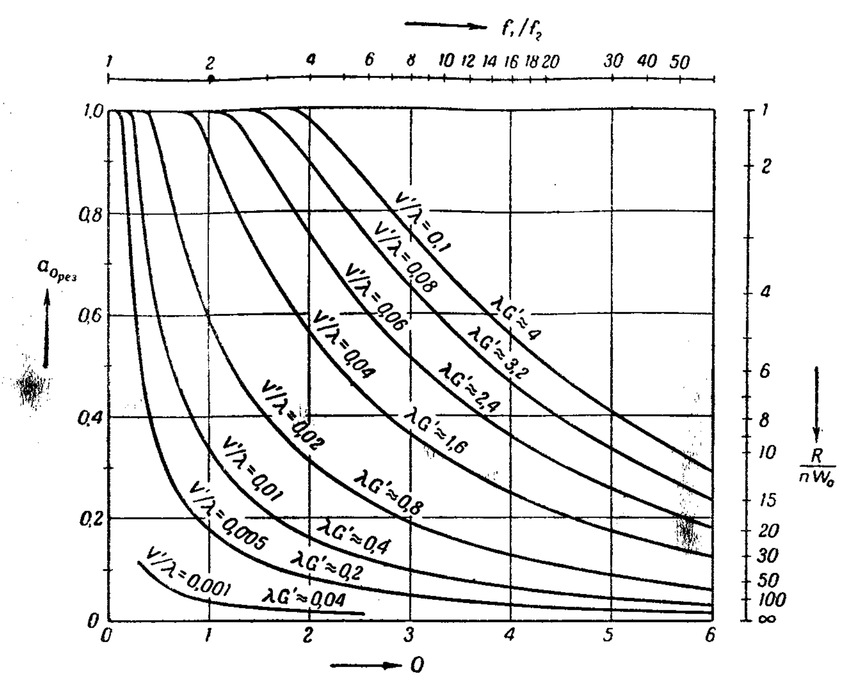
В этом параграфе будут приведены графики, построенные на основе теории § 4, которыми, однако, можно пользоваться, не разбираясь в самой теории.

На фиг. 82 представлена основная номограмма.

Если заданы $a_{0рез.}$ — коэффициент поглощения при резонансе (максимальное значение a_0) и O — число октав, в пределах которых коэффициент поглощения больше $a_{0_{рез.}}/2$, то из фиг. 82 находим нужные значения следующих величин: R/nW_0 (правая шкала ординатной оси), $V'/\lambda_{рез.}$ — отношение воздушного объема к длине волны при резонансе и произведение $\lambda_{рез.}Gn = \lambda_{рез.}G'$, где n — число отверстий на 1 $м^2$, G — проводимость одного

отверстия и G', следовательно, проводимость, — отнесенная к 1 $м^2$.

Так как $\omega_{рез.} = c_0 \sqrt{G'/V'}$, то отношение $V'/\lambda_{рез.}$ равно $\lambda_{рез.}G'/4\pi^2$; поэтому кривые постоянных значений $V'/\lambda_{рез.}$ (см. фиг. 82) являются также кривыми постоянных значений $\lambda_{рез.}G'$. Эти значения примерно в 40 раз больше $V'/\lambda_{рез.}$.



Фиг. 82. Номограмма для проектирования перфорированных экранов.

Чтобы составить более полное представление о частотной полосе поглощения, на горизонтальной оси нанесены две шкалы. На нижней шкале показано число октав между двумя критическими частотами f_1 и f_2, на верхней — отношение между этими частотами.

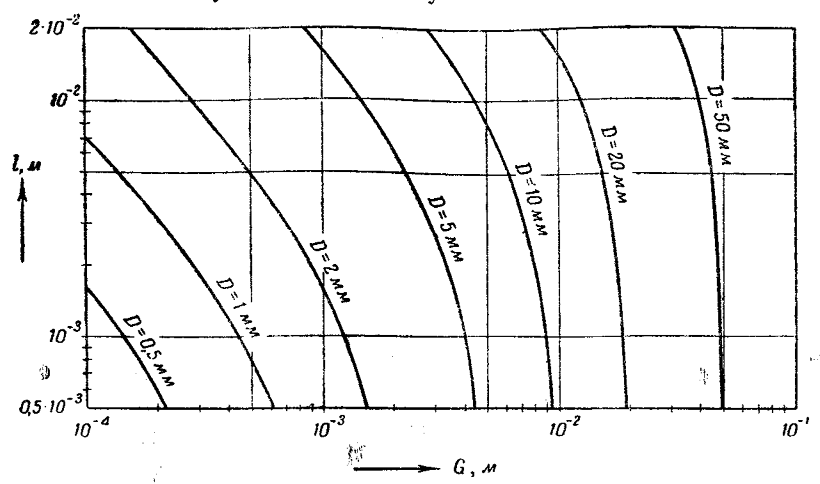
Как правило, задается частота, при которой поглощение максимально, после чего по отношению $V'/\lambda_{рез.}$ определяется зазор между стеной и экраном. Если, например, частота равна 340 *гц*, то $\lambda_{рез.} = 1 м$. Из фиг. 82 видно, что при $a_{0_{рез.}} = 0{,}75$ и O, равном трем октавам (150 — 1200 *гц*), отношение $V'/\lambda_{рез.}$ должно составлять примерно 0,1, т. е. V' должно равняться примерно 5 — 10 *см*.

Требуемое значение произведения $\lambda_{рез.}nG$ может быть получено различными способами. Если перфорации имеют форму

цилиндров с поперечным сечением S, а толщина экрана l, то

$$G = \frac{S}{l + 0{,}8D}, \tag{7.19}$$

где D — диаметр отверстия. Строго говоря, это выражение справедливо, если затухание резонатора обусловлено сопротивлением тонкого воздушного слоя в канале или в непосредственной близости к каналу. Величина G уменьшается, если весь объем



Фиг. 83. Зависимость между проводимостью G, диаметром круглого цилиндрического отверстия D и толщиной экрана l.

резонатора заполнен пористым материалом или если сопротивление обусловлено слоем воздуха толщиной порядка радиуса отверстия. В этом случае в (7.19) надо заменить $0{,}8D$ на $0{,}4(1 + k/h)D$, где k — структурный фактор и h — пористость материала. Для материалов, обычно употребляемых для заполнения, отношение k/h можно принять равным 2. Если толщина экрана мала по сравнению с диаметром отверстий, то

$$G = D, \tag{7.20}$$

или

$$G = \frac{2D}{1 + k/h}, \tag{7.21}$$

причем (7.21) относится к случаю, когда весь объем резонатора заполнен пористым материалом. В практических случаях очень полезной может оказаться приближенная формула (7.20). Если толщина экрана не мала по сравнению с диаметром отверстий и если можно положить k равным единице (воздушное сопротивление сконцентрировано в тонком слое или в незаполненных материалом резонаторах), то величины l и D могут быть

найдены из фиг. 83, на которой представлена зависимость G от l и D. Так, скажем, проводимость $G=3$ *мм* можем быть получена при отверстиях диаметром 5 *мм* в экране толщиной 2,5 *мм*.

Пример. Спроектировать конструкцию с резонансной частотой 300 *гц*, поглощающую 60% на частоте 300 *гц* и 30% на 100 и 900 *гц*.

Здесь $a_{0_{\text{рез.}}}=0{,}6$, $f_1/f_2=9$. Из фиг. 82 находим

$$\frac{V'}{\lambda_{\text{рез.}}}=0{,}08,$$

$$\lambda_{\text{рез.}}G'=3{,}2,$$

$$\frac{R}{nW_0}=4{,}5.$$

Так как $\lambda_{\text{рез.}}=\frac{345}{300}=1{,}15$ *м*, то

$$V'=0{,}09=9\ \text{см},$$

$$G'=nG=2{,}8\ \text{м}^{-1}.$$

Таким образом, воздушный зазор должен быть равен 9 *см*. Дадим несколько вариантов, удовлетворяющих условию $G'=2{,}8$ $м^{-1}$:

n, $м^{-2}$	G, *мм*	D, *мм*	l, *мм*	Процент перфораций
250	11,2	14	1	4
		20	10	8
500	5,6	7	1	2
		12	10	5,5
1000	2,8	3,5	1	1
		8	10	5
2000	1,4	2	1	0,6
		5	10	4

Эти результаты получены непосредственно из фиг. 83. В последней колонке указан процент перфораций (площадь отверстий по отношению к полной площади). Чтобы последний был мал, требуется большое число мелких отверстий при малой толщине экрана. С другой стороны, варианты с малым числом больших отверстий могут быть более экономичными и достаточно эффективными.

Значительная трудность проектирования заключается в осуществлении требуемого сопротивления R. Этого можно достичь путем заполнения всего зазора каким-либо пористым материалом с подходящим воздушным сопротивлением (например, стеклоткань).

Для тонких экранов (толщина мала по сравнению с диаметром отверстий) сопротивление R можно связать с проводимостью G

отдельного отверстия. Эта связь имеет место даже и не для круглых отверстий вследствие полной аналогии обоих понятий. Действительно, величина $1/G$ по определению равна

$$\frac{1}{G}=\int\frac{dl}{S}.$$

Интегрирование производится по длине канала, включая и концевые поправки. Следует помнить, что в случае наличия пористого материала эффективная площадь S, через которую проходит поток воздуха, в k/h раз меньше. Величина R в свою очередь по определению равна

$$R=\int\frac{\frac{dp}{dl}dl}{vS},$$

где v — объемная скорость. Величина $(dp/dl)/v$ — воздушное сопротивление σ среды. Если сопротивление σ велико только на внутреннем конце канала, то интегрирование в выражении для R может быть ограничено только этим участком канала.

В этом случае, если толщина экрана мала, интегрирование в выражении для G происходит по удвоенной длине по сравнению с R, следовательно,

$$R=\frac{\sigma}{G(1+k/h)}. \tag{7.22}$$

Отсюда по заданным R и G может быть вычислено σ, причем k/h можно положить равным, скажем, 2.

Следовательно, если весь зазор заполнен пористым материалом, то воздушное сопротивление должно быть

$$\sigma=\left(1+\frac{k}{h}\right)RG. \tag{7.23}$$

Так как обычно резонаторы используются при низких частотах, то приближенно σ может быть принято равным сопротивлению в случае стационарного потока. Для большей точности должно быть использовано динамическое значение σ при соответствующей частоте, которое может быть больше значения для стационарного потока (см. гл. I, § 9).

В различных практических конструкциях произведение $RG=G'R/n$ различается несущественно (см. фиг. 82). Получающаяся из значения этого произведения величина σ оказывается лежащей близко к значению σ для волосяного войлока (гл. II, § 5). Если толщина экрана велика по сравнению с диаметром отверстия, то σ должно быть больше определяемого формулой (7.23) в $\frac{l+0{,}4(1+k/h)D}{0{,}4(1+k/h)D}$ раз.

Простейшим способом подбора сопротивления R является покрытие экрана с внешней или внутренней стороны тонким слоем с подходящим воздушным сопротивлением, например тканью с высоким сопротивлением, промакательной бумагой и т. д. При этом могут быть использованы измерения σ в стационарном потоке, так как при таких высоких сопротивлениях слоев закон Пуазейля будет справедлив и в случае динамического режима. Кроме того, в этом случае в G не будут входить величины k и h.

Однако при заполнении всего зазора пористым материалом имеется то преимущество, что получаются конструкции, неплохо поглощающие звук в области частот, существенно превышающих резонансную частоту, когда представление о резонаторах по существу перестает быть справедливым.

§ 6. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОГЛОЩАЮЩИХ ЭКРАНОВ С ЩЕЛЯМИ

Если перфорации представляют собой не круглые отверстия, а имеют форму бесконечных или очень длинных щелей, то правила, изложенные в § 5, могут быть использованы и в этом случае. При этом V, G и R нужно рассматривать как объем, проводимость и сопротивление воздуха, отнесенные к 1 *м* длины щели. В качестве грубого приближения при вычислении проводимости G можно использовать формулу для одной щели (см. § 1 настоящей главы):

$$\frac{1}{G} = \frac{d}{b} + 0{,}7 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2c_0}{\omega b},$$

хотя очевидно, что это выражение становится неточным в случае экранов со многими щелями.

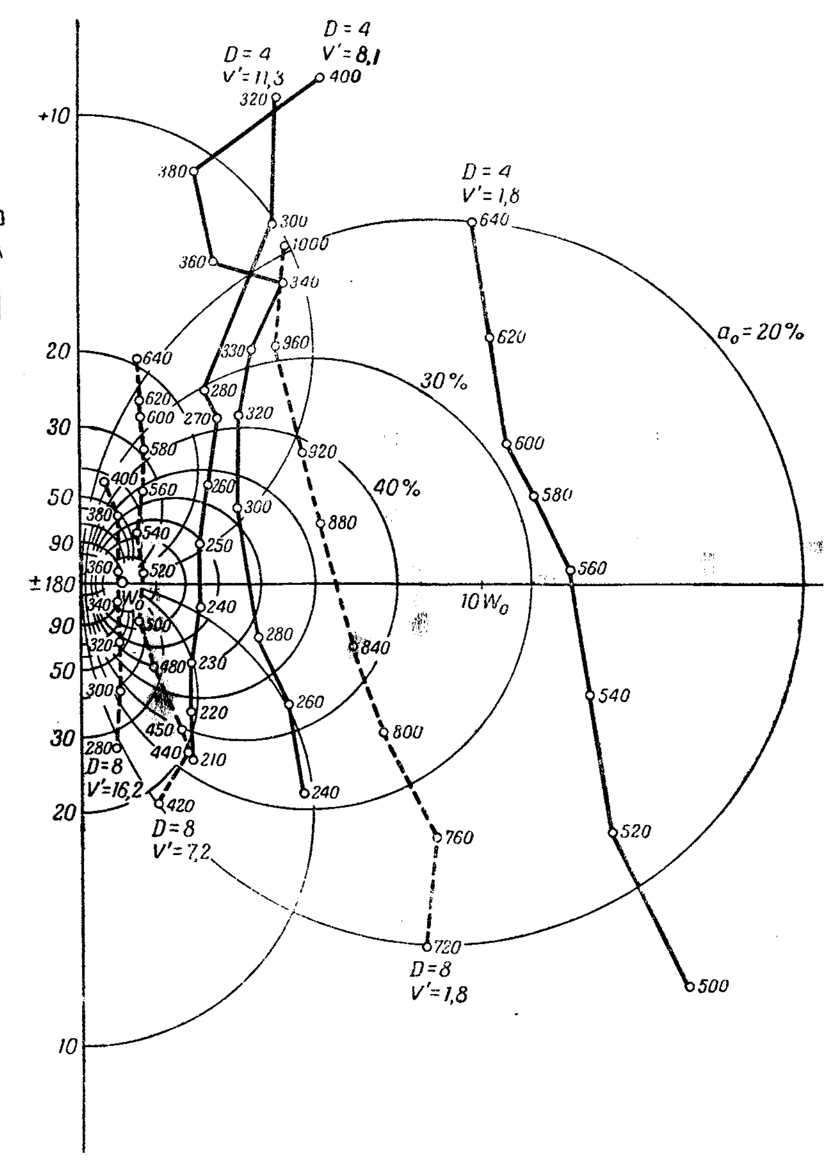
Для тонких экранов и зазоров, полностью заполненных пористым материалом, снова имеем

$$\sigma = \left(1 + \frac{k}{h}\right) RG.$$

§ 7. ОПЫТНЫЕ ДАННЫЕ

В литературе имеется слишком мало опытных данных, которые можно сравнивать с теоретическими результатами. В этом параграфе будут изложены результаты некоторых основных опытов.

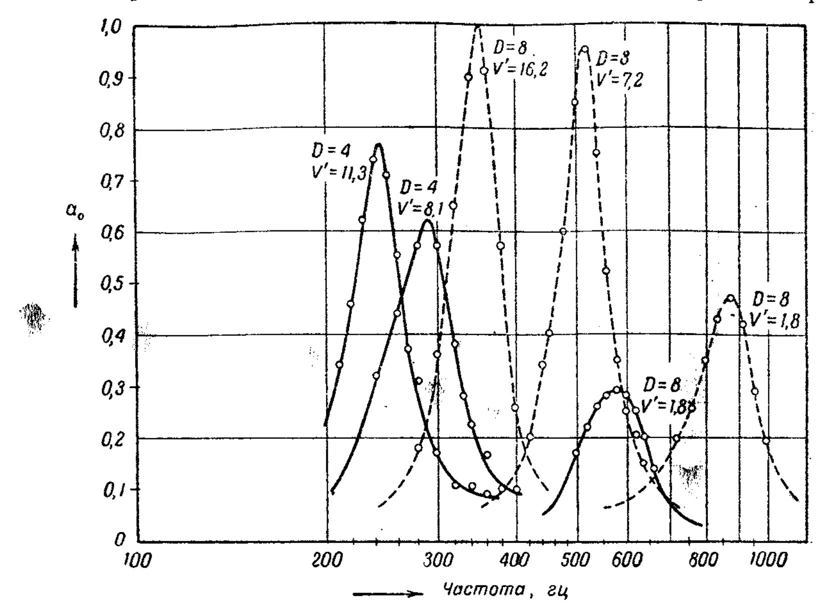
Измерения импеданса проводились на простом резонаторе, представлявшем собой круглую металлическую пластинку толщиной 5 *мм* с круглым отверстием в центре диаметром 4 или 8 *мм*, помещенную при помощи держателя в интерферометр, изображенный на фиг. 33 (диаметр трубы 90 *мм*), на некотором расстоянии от задней твердой пластинки держателя. Таким способом



Фиг. 84. Импедансные контуры шести резонаторов.

можно было осуществить резонаторы с двумя различными проводимостями и различными объемами полости.

Результаты этих опытов нужно сравнивать с теорией перфорированных экранов (см. § 4 и 5), а не с теорией одного резонатора (см. § 3). В самом деле, отраженная волна на достаточно большом расстоянии от резонатора становится плоской, как и в случае перфорированных экранов. Звуковое поле будет такое же, как и в случае экрана, полностью заполненного такими же резонаторами

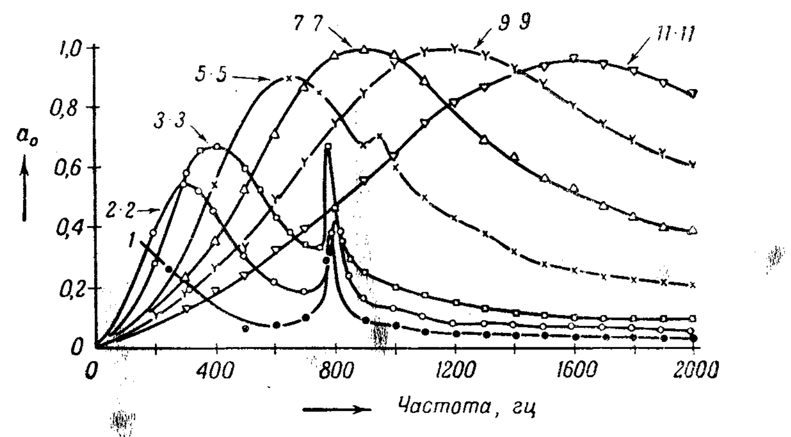


Фиг. 85. Коэффициент поглощения для случая, показанного на фиг. 84.

с числом отверстий на 1 $м^2$, равным единице, деленной на поверхность трубы интерферометра в 1 $м^2$; при этом форма поперечного сечения трубы интерферометра не играет существенной роли.

На фиг. 84 сплошными линиями проведены три импедансных контура для $D=4$ *мм* и $V'=1{,}8$,8,1 и 11,3 *мм*. Около экспериментальных точек указаны также частоты, на которых производились измерения. Характеристики поглощения этих образцов изображены сплошными линиями на фиг. 85. Опытные значения резонансных частот оказались соответственно равными 575, 290 и 245 *гц*, тогда как расчет по заданным D и V дает 627,295 и 252 *гц* (приблизительные значения могут быть найдены с помощью графиков фиг. 83 и 73). Как видно, согласие теории с опытом очень хорошее, за исключением первого случая, когда зазор в резонаторе составлял 2 *мм* ($V'=1{,}8$ *мм* в соответствии с толщиной

держателя). Очевидно, что если толщина зазора в резонаторе меньше диаметра отверстия, то проводимость заметно уменьшается [6]. Легко объясняется и другое свойство импедансных контуров. Сопротивление (на фиг. 84—расстояние до мнимой оси) существенно увеличивается при уменьшении глубины резонатора, если его глубина порядка диаметра отверстия. Здесь сказывается влияние дна резонатора. Далее, ширина кривой поглощения, выраженная в октавах, хорошо согласуется с теоретической (см. фиг. 82). На основании этого видно, что незаполненные резонаторы дают хорошее согласие с теорией.



Фиг. 86. Зависимость коэффициента поглощения от частоты для одного и того же поглотителя с различным числом отверстий.

Пунктирные линии на фиг. 84 и 85 относятся к другим данным, а именно: $D=8$ *мм*, $V=1{,}8$, $7{,}2$ и $16{,}2$ *мм*. Опытные значения резонансных частот равны 870, 515 и 353 *гц*, а теоретические значения равны 1063, 532 и 354 *гц*.

Опыт показывает, что проводимость понижается на 7% уже при глубине резонатора порядка диаметра отверстия. Для резонаторов с достаточной глубиной теория оправдывается очень хорошо. Ширина частотной полосы поглощения оказывается снова совпадающей с вычисленной теоретически по $a_{0_{\text{рез.}}}$ и $V'/\lambda_{\text{рез.}}$.

На фиг. 86 приведены данные, относящиеся к более близкому к практике случаю. Здесь в интерферометр помещались тонкие металлические перфорированные пластинки. Толщина воздушного зазора за пластинкой составляла 30 *мм*. Зазор заполнялся стеклотканью. К сожалению, импеданс при этом не измерялся. Перфорации представляли собой отверстия диаметром 4 *мм*, расположенные по прямоугольной сетке на расстоянии 5,6 *мм* друг от друга; вся пластинка имела около 175 отверстий. Закрывая различное число отверстий, можно менять свойства поглотителя.

Кривые на фиг. 86 соответствуют различному числу открытых отверстий в середине пластинки: 1, 2×2, 3×3, 5×5, 7×7, 9×9 и 11×11 отверстий.

Кривые с числом отверстий от 1 до 5×5 при 800—900 *гц* имеют второй резонанс. Вероятно, он обусловлен колебаниями пластинки, прикрывающей отверстия [52]. Когда открыто много отверстий, сила, действующая на прикрывающую пластинку, мала и вторичный резонанс отсутствует.

Смещение резонанса в сторону высоких частот при увеличении числа открытых отверстий объясняется уменьшением массы пластинки при открывании отверстий.

Из фиг. 86 можно сделать следующие выводы:

а) с увеличением числа отверстий увеличивается резонансная частота благодаря увеличению проводимости G резонатора;

б) если число отверстий увеличивается, то воздушное сопротивление резонатора должно уменьшаться; следовательно, $a_{0_{\text{рез.}}}$ должно возрастать (см. фиг. 11, 81 и 82), что в действительности и наблюдается;

в) для кривой с числом отверстий 9×9 величина $a_{0_{\text{рез.}}}$ достигает почти 100%, тогда как для кривой с числом отверстий 11×11 максимум поглощения становится уже меньше; очевидно, сопротивление достигает критического значения W_0 при числе отверстий 9×9.

Определение зависимости проводимости от числа отверстий представляет собой трудную задачу. Отверстия расположены настолько близко друг от друга, что нельзя считать проводимость пропорциональной числу отверстий. К тому же заполнение резонатора может повлиять на структурный фактор. Далее, поскольку глубина резонатора мала, то при большом числе открытых отверстий «эффективный диаметр» перфораций будет больше, чем глубина; тогда подсчет оказывается совсем невозможным.

Однако сравнение теории с опытом может быть проверено в следующем направлении. Величины $a_{0_{\text{рез.}}}$ и $\lambda_{\text{рез.}}$ известны для каждой кривой. Так как известен и объем, то из фиг. 82 может быть найдена ширина кривой поглощения. Измеренная ширина довольно хорошо согласуется с вычисленной. Имеющиеся расхождения носят систематический характер—измеренная ширина всегда немного больше подсчитанной. Это, очевидно, связано с кривизной импедансного контура.

Из опытных данных настоящего параграфа можно сделать следующие заключения:

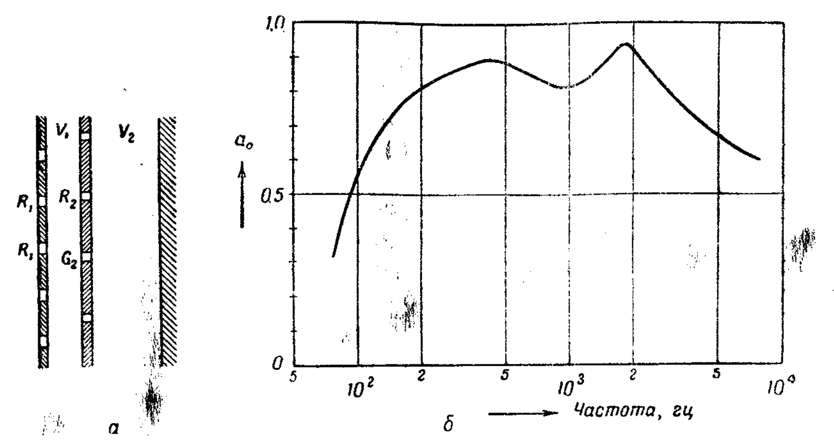
а) для практических конструкций можно пользоваться простой теорией;

б) ширина кривой поглощения в действительности оказывается несколько больше вычисленной теоретически.

§ 8. КОМБИНАЦИИ РЕЗОНАТОРОВ

Хотя существуют вполне удовлетворительные резонансные покрытия, недостатком всякой конструкции этого типа является неравномерность поглощения по частотам (селективность); поглощение вблизи резонанса всегда сильнее. Этот недостаток не сказывается, если поглощение при высоких частотах не необходимо, например там, где в помещениях уже имеется значительное количество пористого материала (обшивка стульев, ковры, присутствующие зрители и др.).

Однако если необходимо добиться поглощения в очень широкой полосе частот, то надо создавать конструкцию с комбинацией



Фиг. 87. Последовательное соединение резонаторов.

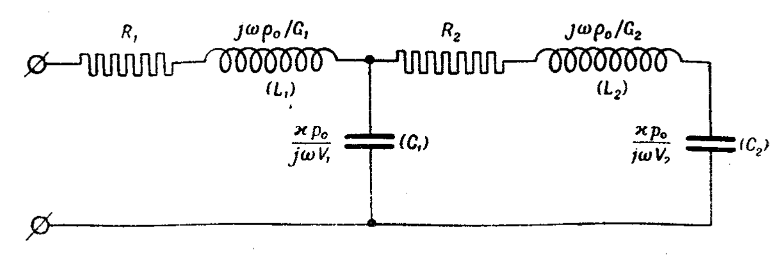
резонаторов. При этом последовательное (фиг. 87, *а*) и параллельное (см. фиг. 89, *а*) соединения резонаторов, повидимому, одинаково хороши.

В то время как конструкция из одной перфорированной стенки имеет только одну резонансную частоту, двойная конструкция (см. фиг. 87, *а*) имеет две резонансные частоты, поэтому кривая поглощения имеет два пика (см. фиг. 87,*б*) [54].

Теория таких двойных резонаторов дана Рэлеем [4]. Рассмотрим ее здесь, использовав импедансное представление. Оно выгоднее тем, что если два перфорированных экрана имеют неодинаковые перфорации, то не всегда можно разделить всю конструкцию на двойные резонаторы. В этом случае конструкцию надо характеризовать величинами, отнесенными к 1 $м^2$: проводимостями G_1 и G_2 (в $м^{-1}$), объемами V_1 и V_2 (толщины соответственных слоев воздуха за исключением объема, заполненного пористым материалом, если таковой имеется) и сопротивлениями R_1 и R_2 (см. фиг. 87,*а*).

Соответствующая электрическая схема изображена на фиг. 88. Наличие шести постоянных затрудняет использование непосредственно этой схемы или вычисленного по ней импеданса для проектирования соответствующих конструкций. Но рассматривая значения обеих резонансных частот, легко получить представление о диапазоне частот, поглощаемых конструкцией.

Приближенные значения резонансных частот можно найти, полагая R_1 и R_2 равными нулю и затем выбирая частоты так,



Фиг. 88. Эквивалентная схема, соответствующая фиг. 87.

чтобы и мнимая часть импеданса обратилась в нуль. Обозначая индуктивности и емкости через L_1, L_2, C_1, C_2 (см. фиг. 88), имеем (при $R_1=R_2=0$):

$$z = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)\Big/\left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right).$$

Эта величина обращается в нуль, если

$$j\omega L_1\left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) + \frac{1}{j\omega C_1}\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) = 0$$

или

$$\omega^4 - \omega^2\frac{L_1C_1 + L_2C_2 + L_1C_2}{L_1L_2C_1C_2} + \frac{1}{L_1L_2C_1C_2} = 0. \qquad (7.24)$$

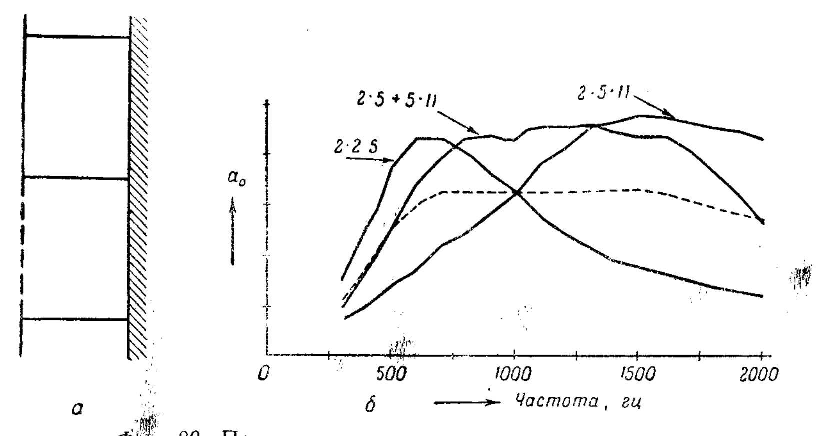
Обозначая резонансные круговые частоты через $\omega_{1\,\text{рез.}}$ и $\omega_{2\,\text{рез.}}$, получаем из (7.24), используя основное свойство корней уравнения,

$$\left.\begin{aligned} \omega_{1\,\text{рез.}}^2 + \omega_{2\,\text{рез.}}^2 &= \omega_{1\,\text{рез.}}'^2 + \omega_{2\,\text{рез.}}'^2 + \frac{1}{L_2C_1}, \\ \omega_{1\,\text{рез.}}\omega_{2\,\text{рез.}} &= \omega'_{1\,\text{рез.}}\omega'_{2\,\text{рез.}}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.25)$$

где $\omega'_{\text{рез.}}$ — резонансная круговая частота изолированного резонатора.

Из второго уравнения (7.25) видно, что среднее геометрическое значение резонансных частот связанных резонаторов такое же, как и для отдельных резонаторов. Из первого уравнения (7.25) следует, что резонансные частоты связанных и изолированных резонаторов отличаются друг от друга. В предварительных расчетах этим различием можно пренебречь. Поправка на связанность

составляет около 20%. Если, например, желательно, чтобы конструкция поглощала частоты от 50 до 3000 *гц*, то резонансные частоты связанных резонаторов должны равняться приблизительно 150 и 1000 *гц*; следовательно, резонансные частоты отдельных резонаторов должны быть выбраны равными примерно 180 и 800 *гц*. Это можно сделать по правилам, указанным в § 5. Гораздо труднее выбрать подходящие сопротивления R_1 и R_2. За неимением достаточных опытных данных хорошим приближением можно считать те значения, при которых отдельные резонаторы не имеют слишком селективного поглощения.



Фиг. 89. Параллельное соединение резонаторов.

На фиг. 89, *а* показано параллельное соединение резонаторов: два резонатора с различными резонансными частотами расположены почти рядом друг с другом. При покрытии стен резонаторами подобного вида коэффициент поглощения может быть определен из среднего значения удельного адмитанса (податливости):

$$Y = f_1 Y_1 + f_2 Y_2, \tag{7.26}$$

где f_1 и f_2 — части поверхности, занятые соответственно резонаторами первого и второго типа, а Y_1 и Y_2 — соответствующие адмитансы. Уравнение (7.26) предполагает, что резонаторы очень малы по сравнению с длиной волны, т. е. давление постоянно по всей стенке и объемное смещение аддитивно.

Коэффициент поглощения подсчитывается по известной формуле (7.8), но вместо импеданса используется адмитанс ($1/W_0$ вместо W_0). Поэтому круговая диаграмма, изображенная на фиг. 11, остается в силе, но снова вместо W_0 должно фигурировать $1/W_0$. Далее, имеем

$$\frac{1}{Y} = R + \frac{j\omega\rho_0}{G} + \frac{\varkappa p_0}{j\omega V}$$

или

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L + 1/j\omega C}.$$

Следует помнить, что все величины, входящие в эти уравнения, отнесены к 1 $м^2$. Подставляя значения Y_1 и Y_2 в (7.26), найдем Y. Зная Y, можно найти коэффициент поглощения. Как и в случае последовательного соединения резонаторов, вследствие наличия шести параметров удобнее ограничиться вычислением резонансных частот. Эти частоты дают хорошее представление об интервале поглощаемых частот, при условии подходящего выбора сопротивлений.

Пренебрегая сопротивлениями R_1 и R_2, мы тем самым предполагаем, что резонанс наступает, когда проводимости Y_1 и Y_2 становятся бесконечно большими, т. е. при двух резонансных частотах отдельных резонаторов. Таким образом, в этом случае соединение резонаторов не сказывается на резонансных частотах, что значительно упрощает проектирование. Кроме того, конструкции такого типа имеют такую же толщину, что и обычные конструкции с одним резонатором. На фиг. 89,*б* приведены результаты опытов с конструкциями подобного типа. Использовался круглый образец с внутренним диаметром 86 *мм* и толщиной 30 *мм*, заполненный стеклотканью. Измерения производились с помощью интерферометра диаметром 90 *мм*; таким образом, результаты измерения могут относиться и к случаю стены, сплошь покрытой резонаторами подобного типа. Поглощающая поверхность резонатора разделялась на две половины с помощью помещенной в трубе тонкой металлической пластинки, расположенной по диаметру трубы. Так как поглощающая поверхность резонатора такая же, как описано в § 6, то можно было получать требуемые резонансные частоты каждой половины поверхности резонатора, закрывая соответствующее число отверстий. Правая кривая соответствует случаю, когда в каждой половине открыто 5×11 отверстий. Наблюдалась резонансная частота, как это и следовало ожидать, совпадающая со случаем 11×11 на фиг. 86, так как условия приблизительно идентичны. Левая кривая относится к случаю, когда в каждой половине число открытых отверстий было 2×5 (соответствует кривой 5×5 фиг. 86). Средняя кривая получена при числе отверстий 5×11 в одной половине и 2×5 в другой. Результат в этом случае получается намного лучше по сравнению с обоими предыдущими случаями.

Разделение поглощающей поверхности на две части в последнем случае являлось существенным. При удалении разделяющей пластинки мы получили бы кривую, соответствующую числу открытых отверстий, равному $5 \times 11 + 2 \times 5 = 65$; эта кривая будет лежать между кривыми 7×7 и 9×9 на фиг. 86.

Рассмотрим, наконец, вопрос о возможности использования подобного типа покрытий на практике. Практически покрытие такого типа, как это изображено на фиг. 89, могло бы представлять собой длинные полосы шириной 75 *мм* с чередующимися отверстиями обоих родов. Зазор между стенкой и перфорированным слоем при этом должен быть разделен на длинные каналы перегородками, расположенными в местах соединения отдельных экранов. Такая конструкция не совсем практична, поэтому возникает вопрос об увеличении ширины отдельных полос до 0,5 *м* или более. Почти нет опытных данных, которые указывали бы, до каких размеров можно увеличивать ширину без ухудшения поглощения. Предварительные расчеты показывают, что при малой ширине поглощение соответствует среднему адмитансу [см. (7.26)]; при очень большой ширине по сравнению с длиной волны коэффициент поглощения получаем как среднее значение отдельных коэффициентов. При промежуточных же значениях ширины коэффициент поглощения имеет максимумы и минимумы. Однако этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании. Кривая для очень большой ширины (среднее поглощение) показана пунктиром на фиг. 89, *б*. Она проходит ниже кривой, соответствующей малой ширине; при этом положение кривой для малой ширины находится в согласии с предварительными теоретическими результатами.

Выше были рассмотрены конструкции с двумя видами резонаторов, соединенными последовательно или параллельно. Можно получить еще лучшие результаты, если использовать комбинации большего числа резонаторов. Такой случай уже встречался в гл. VI (см. фиг. 53), где рассматривалась конструкция, состоящая из большого числа одинаково перфорированных экранов, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Число резонансных частот в этих случаях равно числу экранов. Однако непрактично рассматривать этот случай как задачу с бóльшим числом резонаторов. Лучше использовать теорию однородных слоев, в которую вводятся структурный фактор k и пористость h (см. гл. VI, § 2).

Для конструкции с большим числом параллельно соединенных резонаторов адмитанс дается формулой

$$Y = f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + f_3 Y_3 + \dots$$

При этом резонансные частоты покрытия совпадают с резонансными частотами отдельных резонаторов. На этих частотах при желании можно получить коэффициент поглощения, равный 100%. Например, если коэффициент поглощения достигает 100% на частотах 150, 300, 600 и 1200 *гц*, то такая конструкция представляет собой хороший звукопоглотитель в диапазоне от 100 до 2000 *гц*.

Глава VIII

НАКЛОННОЕ И ДИФФУЗНОЕ ПАДЕНИЕ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих главах рассматривалось поглощение звука при нормальном падении. В случае наклонного падения как теория, так и эксперимент становятся значительно более трудными. Однако ввиду большой практической важности случая наклонного падения следует упомянуть о поведении материалов и в этом случае.

При нормальном падении коэффициент поглощения измеряется совсем просто и свойства материалов в этом случае хорошо изучены. При наклонном падении методы измерений усложняются и, кроме того, появляются новые переменные, что существенно увеличивает число измерений, необходимых для описания свойств каждого образца. Этим объясняется то, что экспериментальные данные о свойствах материалов при наклонном падении звука очень скудны.

Отметим здесь следующие способы измерения коэффициента поглощения:

1. *Интерференционный метод* [62]. При наклонном падении, так же как и в случае нормального падения, коэффициент отражения может быть найден по интерференционной картине. Опыт следует проводить с плоскими волнами; образцы должны быть большого размера. Кроме того, опыт надо проводить в свободном пространстве, чтобы избежать искажения звукового поля.

2. *Измерение при угле падения 45°* [63]. Если на две покрытые испытуемым материалом стенки, расположенные перпендикулярно друг к другу, падает плоская волна перпендикулярно к линии их соединения, причем направление падения параллельно биссектрисе угла, то получается сравнительно простая интерференционная картина. Коэффициент поглощения может быть найден из отношения экстремальных значений градиента давления или давления вдоль направления падения. В этом случае образцы также должны быть больших размеров, а опыты должны проводиться в свободном пространстве.

3. *Измерение при угле падения 55,7°* [63]. Если плоская волна падает по направлению к вершине трехгранного угла, образованного

тремя взаимно перпендикулярными стенками, покрытыми испытуемым материалом (причем направление падения симметрично относительно стенок), то, как и в предыдущем случае, появляется интерференционная картина. Измерение коэффициента поглощения производится так же, как и в предыдущем случае.

4. *Импульсный метод* [64]. Если источник звука, расположенный на некотором расстоянии от испытуемого образца большого размера, излучает короткие импульсы, то микрофон, расположенный также на некотором расстоянии от образца, будет принимать два импульса—прямой и отраженный—от образца (если опыт производится в свободном пространстве). Отношение интенсивностей обоих импульсов зависит от расстояний и от коэффициента поглощения образца. Последний можно определить по отношению интенсивностей и по расстояниям, а также предварительно прокалибровав установку с абсолютно отражающей поверхностью.

5. *Метод стоячих волн в прямоугольном помещении* [65, 66]. Этот метод основан на том, что собственные функции объема, имеющего форму параллелепипеда, могут быть представлены в виде суперпозиции плоских волн, если стены этого объема покрыты однородным материалом. Повидимому, этот способ является наиболее подходящим, так как при этом не требуется ни свободного пространства, ни слишком больших образцов. При некоторых условиях в данном объеме можно возбудить только одну собственную частоту. Коэффициент поглощения при соответствующем угле падения плоской волны на стенку, покрытую испытуемым материалом, может быть вычислен по затуханию силы звука после прекращения возбуждения (при этом остальные стенки должны быть полностью отражающими).

6. *Реверберационный метод*. В этом хорошо известном случае падение звука происходит более или менее диффузно. Трактовка этого случая чрезвычайно трудна [67].

Так как пока достаточных сведений о поведении материала при наклонном падении не имеется, то рассмотрим этот вопрос теоретически. Наиболее просто теоретический анализ производится в случае материалов с так называемыми локально реагирующими поверхностями. Слой материала называется локально реагирующим, если нормальная к поверхности составляющая скорости зависит только от давления в данной точке поверхности и не зависит от угла падения. Типичными примерами являются: конструкция из стеклянных трубок (см. гл. VI, § 2), резонатор в безграничной стене (см. гл. VII, §2), стенка с резонаторами, объемы которых связаны друг с другом только посредством воздуха,

находящегося перед стеной. В этих случаях отношение p/v_n не зависит от угла падения и равно импедансу при нормальном падении[1].

В случае слоя обычного пористого материала или перфорированного экрана при отсутствии перегородок в воздушном зазоре между экраном и стеной импеданс p/v_n зависит от угла падения тем сильнее, чем больше скорость звука в поглощающей среде и чем меньше затухание звука в боковом направлении. Это, в частности, показал Морз [68] на различных примерах.

Благодаря тому, что структурный фактор пористых материалов всегда больше единицы (примерно от 4 до 9), скорость звука в этих средах в 2—3 раза меньше, чем в воздухе. Если учесть еще заметное затухание в боковом направлении, то имеются все основания, чтобы в этом случае пренебречь боковым распространением. Тот факт, что при малой скорости звука материал становится локально реагирующим, может быть объяснен, если принять во внимание, что преломленная волна в материале при этом будет распространяться в направлении нормали [14]. Даже при скользящем падении преломленная волна в практических случаях отклоняется от нормали только на 20—30°, поэтому в пористых материалах взаимодействие пор не будет существенно влиять на импеданс.

В случае экрана с незаполненным воздушным зазором между ним и стенкой, вдоль зазора, будет распространяться волна. Это является недостатком покрытий такого типа по сравнению с покрытиями с заполненным зазором. Впрочем, этого можно избежать, разделив зазор при помощи перегородок на несвязанные области. Случай перфорированного экрана с незаполненным зазором при наклонном падении недавно был рассмотрен Бриллюэном [69].

§ 2. НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ НА ПОВЕРХНОСТЬ С ЛОКАЛЬНОЙ РЕАКЦИЕЙ

Пусть плоская звуковая волна падает на поверхность с импедансом z (фиг. 90). Угол падения обозначим через φ. Пусть p_i и p_r — давления, создаваемые падающей и отраженной волнами в произвольной точке поверхности. Очевидно,

$$z = \frac{p_i + p_r}{v_{in} + v_{rn}},$$

где v_{in} и v_{rn} — нормальные компоненты скоростей в падающей и отраженной волнах. Далее

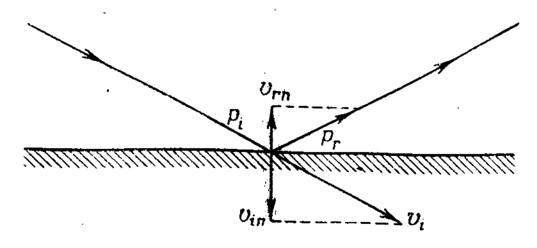
$$v_{in} = \frac{p_i}{W_0} \cos\varphi, \quad v_{rn} = -\frac{p_r}{W_0} \cos\varphi;$$

[1]) Однородные среды при определенных условиях также могут считаться локально реагирующими. См. Бреховских Л. М., Усп. физ. наук, **32**, **4**, 463 (1947). *(Прим. ред.)*

следовательно,

$$\frac{z\cos\varphi}{W_0}=\frac{p_i+p_r}{p_i-p_r}.$$

Отсюда видно, что для коэффициента отражения p_r/p_i и коэффициента поглощения $1-|p_r/p_i|^2$ мы получаем те же уравнения, что и для нормального падения, но только вместо z теперь фигурирует $z\cos\varphi$. Поэтому диаграмма, изображенная на фиг. 11, применима также и в этом случае. Она дает коэффициент отражения и скачок фазы в комплексной плоскости переменной $z\cos\varphi$. Таким образом, когда импеданс материала больше W_0, уменьшение



Фиг. 90. Случай наклонного падения.

импеданса из-за множителя $\cos\varphi$ будет, вообще говоря, увеличивать коэффициент поглощения. Только для очень малых $\cos\varphi$ (почти скользящее падение) умножение на $\cos\varphi$ становится невыгодным. При этом среднее значение коэффициента поглощения по всем углам также может оказаться больше, чем при нормальном падении.

Среднее значение коэффициента поглощения определяется как отношение энергии, поглощенной данным элементом поверхности, к падающей на этот элемент энергии при диффузном (равновероятном по всем направлениям) падении. Энергия диффузного поля, приходящаяся на телесный угол $d\Omega$ и соответствующая углу падения φ, пропорциональна $\cos\varphi\, d\Omega$. Пусть коэффициент поглощения для этого направления будет a_φ. Среднее значение коэффициента поглощения, очевидно, будет равно

$$\bar{a}=\frac{\text{Поглощаемая энергия}}{\text{Падающая энергия}}=\frac{\int a_\varphi \cos\varphi\, d\Omega}{\int \cos\varphi\, d\Omega}.$$

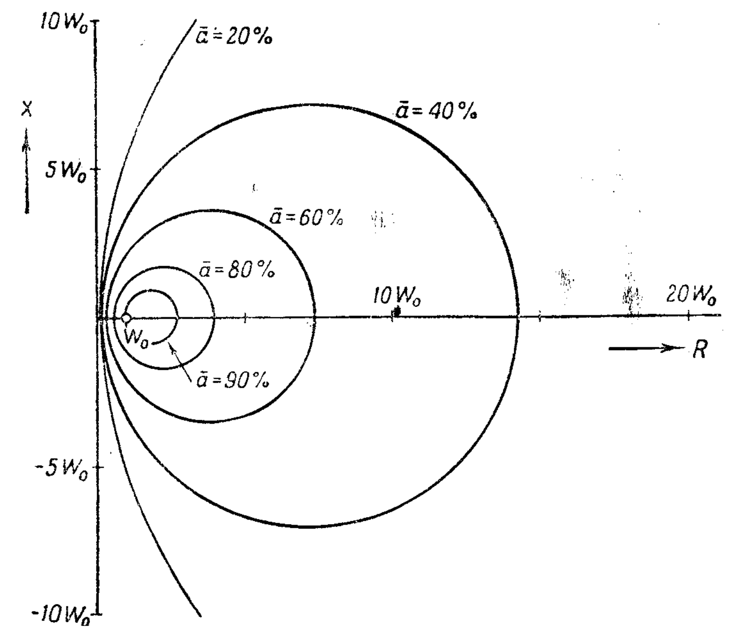
Так как a_φ зависит только от φ, то удобно в качестве элемента телесного угла $d\Omega$ взять телесный угол между двумя конусами, направляющие которых образуют с нормалью к рассматриваемому элементу поверхности углы φ и $\varphi+d\varphi$. При этом $d\Omega=2\pi\sin\varphi\, d\varphi$ и

$$\bar{a}=\int_0^{\pi/2} a_\varphi \sin 2\varphi\, d\varphi. \tag{8.1}$$

Для поверхностей с локальной реакцией зависимость a_φ от φ известна, так что интеграл может быть вычислен [70, 71]. Если импеданс представить в виде $R+jX$, то в результате получаем выражение

$$\bar{a}=8\frac{W_0R}{R^2+X^2}-8\left(\frac{W_0R}{R^2+X^2}\right)^2\ln\left(\frac{R^2+X^2}{W_0^2}+\frac{2R}{W_0}+1\right)+$$
$$+8\frac{R}{X}\left(\frac{W_0X}{R^2+X^2}\right)^2\left(\frac{R^2}{X^2}-1\right)\operatorname{arctg}\frac{X}{R+W_0}. \qquad (8.2)$$

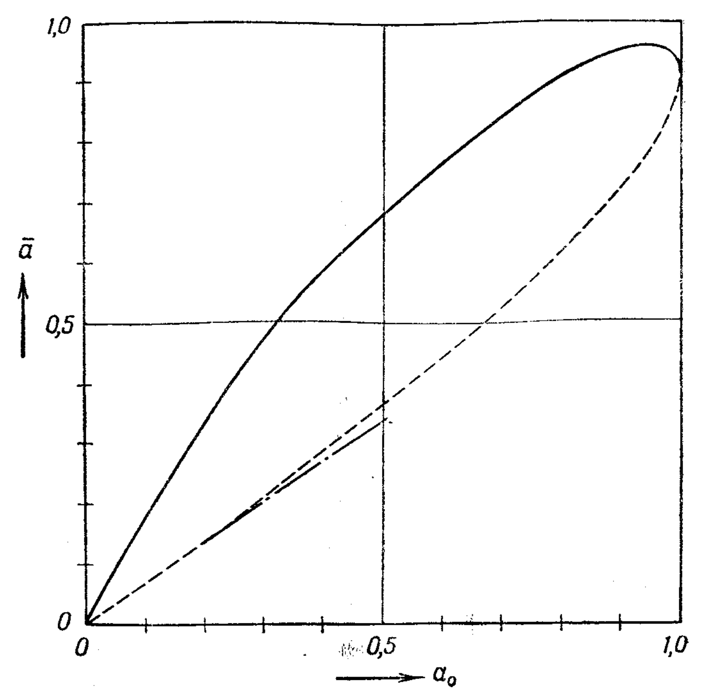
Более удобным, конечно, является геометрическое представление этого выражения в виде линий постоянных значений $\bar{a}$ на плоскости комплексного переменного z. Эти линии для случая диффузного падения изображены на фиг. 91. Они совершенно неотличимы от окружностей, хотя в действительности не являются



Фиг. 91. Среднее значение коэффициента поглощения как функция импеданса (для поверхности с локальной реакцией).

ими. Другой способ представления предложен Морзом [68]. Для диффузного падения наибольшее значение $\bar{a}$ оказывается равным 0,96.

На фиг. 92 проводится сравнение между $\bar{a}$ и a_0 в предположении, что импеданс вещественный. Пунктирная линия соответствует



Фиг. 92. Соотношение между средним коэффициентом поглощения при диффузном падении и коэффициентом поглощения при нормальном падении для поверхностей с локальной реакцией при вещественном импедансе.

случаю, когда импеданс меньше, чем W_0. Из фигуры видно, что если импеданс больше W_0, то $\bar{a}$ заметно больше a_0.

§ 3. НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ НА ПОВЕРХНОСТЬ С ОДНИМ РЕЗОНАТОРОМ

Пусть плоская звуковая волна падает под углом падения φ на поверхность, содержащую один резонатор. Так как акустическая «э.д.с.» равна $2p_i$ и внутренний импеданс источника не зависит от угла падения, то полная поглощаемая мощность не будет зависеть от этого угла. Отношение поглощаемой мощности к энергии, падающей на 1 $м^2$ поверхности, т. е. к величине $(\hat{p}_i^2/2W_0)\cos\varphi$, дает поверхность «открытого окна», приходящуюся на 1 $м^2$ поглотителя.

Так как поглощаемая мощность не зависит от φ, то поверхность «открытого окна» будет обратно пропорциональна $\cos\varphi$. Среднее значение поверхности «открытого окна» для диффузного падения звука внутри конуса, образующая которого составляет

с нормалью угол φ, оказывается связанным с соответственным значением A при нормальном падении соотношением:

$$\frac{\bar{A}}{A} = \frac{-\ln \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}. \tag{8.3}$$

Угол φ нельзя стремить к 90°, так как при этом $\bar{A}$ возрастает до бесконечности, что, очевидно, не имеет смысла.

Согласно (8.3), эффективная поверхность «открытого окна» при диффузном падении всегда больше, чем при нормальном падении. Опыты в реверберационном помещении подтверждают это заключение. Чтобы дать некоторое представление о величине этого эффекта, приведем ниже величину отношения $\bar{A}/A$ для некоторых значений максимального угла падения $\varphi_{макс.}$:

$\varphi_{макс.}$	30°	45°	60°	75°
$\bar{A}/A$	1,07	1,18	1,38	1,82

Так как вследствие влияния кривизны импедансного контура резонатор в действительности менее селективный, чем это следует из теории, то можно считать, что поверхность «открытого окна» в действительности примерно в 2 раза больше теоретического значения при нормальном падении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kosten C. W., Zwikker C., Physica, **8**, 933 (1941).
2. Crandall I. B., Theory of Vibrating Systems and Sound, App. A., London, 1927.
3. Jahnke E., Emde F., Funktionentafeln, Berlin, 1933, стр. 213.
4. Рэлей, Теория звука, т. II, М.—Л., 1944.
5. Wood A., Acoustics, London, 1947, стр. 252.
6. Zwikker C., Van den Eijk K., Kosten C. W., Physica, **10**, 239 (1943).
7. Kaye, Sherratt, Proc. Roy. Soc., **A141**, 123 (1933).
8. Korringa J., Kronig R., Smit A., Physica, **11**, 209 (1945).
9. Rayleigh, Phil. Mag., **34**, 481 (1892); Scientific papers, **4**, 19 (1903).
10. Kosten C. W., Appl. sci. Res., **B1**, 241 (1949).
11. Wüst H., Hochfrequenztechn. u. Elektroakust., **44**, 73 (1934).
12. Ferrero M., Sacerdote G., Nuovo Cimento, **4**, 3 (1947).
13. Kosten C. W., Zwikker C., Physica, **8**, 968 (1941).
14. Kosten C. W., Диссертация, Delft, 1942.
15. Van den Eijk J., Zwikker C., Physica, **8**, 149 (1941).
16. Leonard R. W., Journ. Acoust. Soc. Am., **20**, 39 (1948).
17. Leonard R. W., Journ. Acoust. Soc. Am., **17**, 240 (1946).
18. Meyer E., Keidel L., Zs. techn. Phys., **18**, 299 (1937).
19. Costadoni B. C., Zs. techn. Phys., **17**, 108 (1936).
20. Böhme H., Akust. Zs., **2**, 303 (1937).
21. Kosten C. W., Zwikker C., Physica, **4**, 221 (1937).
22. Kosten C. W., Proc. Rubb. Techn. Conf., London, 1938, стр. 987.
23. Van Gijn G., Zwikker C., Ingenieur (голл.), **56** (1941) O 11;
24. Meyer E., Keidel L., Zs. techn. Phys., **18**, 299 (1937).

25. Meyer E., Zs. Ver. deut. Ing., **78**, 1957 (1934).
26. Kosten C. W., Zwikker C., Physica, **4**, 843 (1937).
27. Beranek L. L., Journ. Acoust. Soc. Am., **12**, 3 (1940).
28. Tuma J., Sitz. ber. Kaiserl. Akad. Wiss., **3**, 402 (1902).
29. Taylor H. O., Phys. Rev., **2**, 270 (1913).
30. Paris E. T., Proc. Phys. Soc., **39**, 269 (1927).
31. Goldbaum G., Waetzmann E., Zs. Phys., **54**, 179 (1929).
32. Eckhardt E. A., Chrisler V. L., Bur. Standards Sci., Paper № 526, 1926.
33. Hall W. M., Journ. Acoust. Soc. Am., **11**, 140 (1939).
34. Harmans J., Akust. Zs., **5**, 215 (1940).
35. Van den Eijk J., Kosten C. W., Kok W., Appl. sci. Res., **B1**, 50 (1947).
36. Wente E. C., Bedell E. H., Bell Syst. Tech. Journ., **7**, 1 (1928).
37. Kosten C. W., Appl. sci. Res., **B1**, 35 (1947).
38. Kennely A. E., Pierce G. W., Journ. Franklin Inst., **200**, 467 (1912).
39. Fay K. D., Hall W. M., Journ. Acoust. Soc. Am., **5**, 46 (1933).
40. Bekkering D. H., Kosten C. W., Appl. sci. Res., **B1**, 205 (1948).
41. Geluk J. J., Диссертация, Delft, 1946.
42. Zakarias, Tech. Mitt. Tungsram, **39**, 103 (1938).
43. Riegger H., Wiss, Veröffentl. Siemens-Werken, 3, 67 (1924).
44. Zwikker C., Van den Eijk J., Kosten C. W., Physica, **8**, 1094 (1941).
45. Morse P. M., Bolt R. H., Brown R. L., Journ. Acoust. Soc. Am., **12**, 217 (1940).
46. Kosten C. W., Nederlands Tijdschr. Natuurk., **14**, 309 (1948).
47. Wintergerst E., Zs. tech. Phys., **16**, 569 (1935).
48. Ржевкин С. Н., ЖТФ, **3**, № 6, 2103 (1936).
49. Meyer E., Elek. Nachr.-Tech., **13**, 95 (1936).
50. Zeller W., Akust. Zs., **3**, 32 (1938).
51. Willms W., Akust. Zs., **4**, 29 (1939).
52. Jordan V. L., Akust. Zs., **5**, 77 (1940).
53. Pedersen P. O., Ingeniørvidenskab. Skrifter, № 5, Copenhagen (1940).
54. Brüel P. V., Lydisolation og Rumakustik, Götebrog, 1946, стр. 104.
55. Ingerslev F., Nielsen A. K., Ingeniørvidenskab. Skrifter, № 5, Copenhagen (1944).
56. Brüel P., Summer Symposium of the Acoustics Group of the Physical Society, 1947, London, 1949.
57. Gigli A., Journ. Acoust. Soc. Am., **20**, 839 (1948).
58. Jordan V. L., Journ. Acoust. Soc. Am., **19**, 972 (1947).
59. Pedersen P. O., Lydtekniske Untersøgelser, Ingeniørvidenskab. Skrifter, Copenhagen, 1940, стр. 72.
60. Ламб, Гидродинамика, М.—Л., 1947.
61. Ingård U., Journ. Acoust. Soc. Am., **20**, 665 (1948).
62. Cremer L., Elek. Nachr.-Tech., **10**, 302 (1933); **13**, 36 (1936).
63. Schuster K., Akust. Zs., **3**, 137 (1938).
64. Spandöck F., Ann. d. Phys., **20**, 328 (1934).
65. Cremer H., Cremer L., Akust. Zs., **2**, 296 (1937).
66. Neubert H., Akust. Zs., **5**, 189 (1940).
67. Meyer E., Schoch A., Akust. Zs., **4**, 51 (1939).
68. Морзе П., Колебания и звук, М.—Л., 1947.
69. Brillouin J., Cahiers du Centre sci. et tech. du Bâtiment, Cahier 31, январь 1949.
70. Morse P. M., Bolt R. H., Brown R. L., Journ. Acoust. Soc. Am., **12**, 217 (1940).
71. Kosten C., Zwikker C., Physica, **8**, 251 (1941).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор Л. В. ГЕССЕН
Переплет художника *М. П. Пешкова*
Технический редактор *Б. М. Ильин*   Корректор *К. И. Иванова*

Сдано в производство 8/I 1952 г. Подписано к печати 5/III 1952 г. А02437.
Бумага 60×92¹/₁₆=5 бум. л., 10 печ. л. Уч.-издат. л. 9,8. Изд. № 2/1323. Зак. 12.
Цена 8 р. 40 к. (по прейскуранту 1952 г.)

16-я типография Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9.

8 р. 40 к.

5С
Ц 282